Die Aufgaben der zweiten Runde 1999

Aufgabe 1

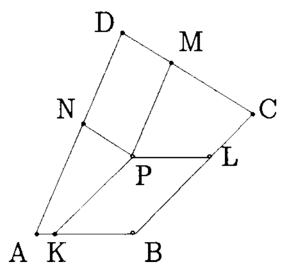
Die Eckpunkte eines regelmäßigen 2n-Ecks ($n \in \mathbb{N}$, $n > 2$) sollen derart mit jeweils einer der Zahlen 1, 2, 3,..., 2n beschriftet werden, dass die Summe der Zahlen an zwei benachbarten Eckpunkten jeweils gleich der Summe der Zahlen an den beiden diametral gegenüberliegenden Eckpunkten ist. Dabei sollen die Zahlen an den Ecken alle verschieden sein.
Man beweise, dass dies dann und nur dann möglich ist, wenn n ungerade ist.

Aufgabe 2

Für jede natürliche Zahl n werde die Quersumme ihrer Darstellung im Zehnersystem mit Q(n) bezeichnet.
Man beweise, dass für unendlich viele natürliche Zahlen k die Ungleichung $Q(3^k) \geq Q(3^{k+1})$ gilt.

Aufgabe 3

Gegeben seien ein konvexes Viereck ABCD und die Punkte K, L, M, N, P mit folgenden Eigenschaften:
– K, L, M, N sind innere Punkte der Seiten AB bzw. BC bzw. CD bzw. DA.
– P ist innerer Punkt des Vierecks ABCD.
– Die Vierecke PKBL und PMDN sind Parallelogramme.
Mit S, S_1, S_2 werden die Flächeninhalte der Vierecke ABCD bzw. PNAK bzw. PLCM bezeichnet.
Man beweise: $\sqrt{S} \geq \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$



Aufgabe 4

Eine natürliche Zahl heiße *bunt*, wenn sie sich als Summe einer positiven Quadratzahl und einer positiven Kubikzahl darstellen lässt.
Es seien r und s zwei beliebig gegebene positive ganze Zahlen.
Man beweise:
a) Für unendlich viele natürliche Zahlen n sind die Zahlen r + n und s + n beide bunt.
b) Für unendlich viele natürliche Zahlen m sind die Zahlen $r \cdot m$ und $s \cdot m$ beide bunt.