

Die Aufgaben der 1. Runde 2004

Aufgabe 1

Zu Beginn eines Spiels stehen an der Tafel die Zahlen $1, 2, \dots, 2004$. Ein Spielzug besteht daraus, dass man

- eine beliebige Anzahl der Zahlen an der Tafel auswählt,
- den Elferrest der Summe dieser Zahlen berechnet und an die Tafel schreibt,
- die ausgewählten Zahlen löscht.

Bei einem solchen Spiel standen irgendwann noch zwei Zahlen an der Tafel. Eine davon war 1000; man bestimme die andere Zahl.

Hinweis: Zur vollständigen Lösung gehört nicht nur die Angabe der Zahl, sondern auch der Nachweis, dass diese zweite an der Tafel stehende Zahl keine andere als die angegebene sein kann.

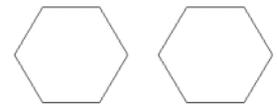
Aufgabe 2

Die Seitenlängen a, b, c eines Dreiecks seien ganzzahlig, ferner sei eine der Höhen des Dreiecks gleich der Summe seiner beiden anderen Höhen.

Man beweise, dass dann $a^2 + b^2 + c^2$ eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 3

Man beweise, dass die beiden abgebildeten kongruenten regelmäßigen Sechsecke so in insgesamt sechs Teile zerschnitten werden können, dass diese Teile sich lückenlos und überschneidungsfrei zu einem gleichseitigen Dreieck zusammensetzen lassen.



Aufgabe 4

Ein Würfel sei so in endlich viele Quader zerlegt, dass der Rauminhalt der Umkugel des Würfels so groß ist wie die Summe der Rauminhalte der Umkugeln aller Quader der Zerlegung.

Man beweise, dass dann alle diese Quader Würfel sind.