



Die Aufgaben der 1. Runde 2005

Aufgabe 1

Im Zentrum eines 2005×2005 -Schachbretts liegt ein Spielwürfel, der in einer Folge von Zügen über das Brett bewegt werden soll.

Ein Zug besteht dabei aus folgenden drei Schritten:

- Man dreht den Würfel mit einer beliebigen Seite nach oben,
- schiebt dann den Würfel um die angezeigte Augenzahl nach rechts oder um die angezeigte Augenzahl nach links und
- schiebt anschließend den Würfel um die verdeckt liegende Augenzahl nach oben oder um die verdeckt liegende Augenzahl nach unten.

Das erreichte Feld ist das Ausgangsfeld für den nächsten Zug.

Welche Felder lassen sich durch eine endliche Folge derartiger Züge erreichen?

Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Aufgabe 2

Die ganze Zahl a habe die Eigenschaft, dass $3a$ in der Form $x^2 + 2y^2$ mit ganzen Zahlen x, y darstellbar ist.

Man beweise, dass dann auch a in dieser Form darstellbar ist.

Aufgabe 3

Den Seiten a, b, c eines Dreiecks liegen die Winkel α, β, γ gegenüber. Es sei ferner $3\alpha + 2\beta = 180^\circ$.

Man beweise, dass dann $a^2 + bc = c^2$ ist.

Aufgabe 4

Für welche positiven ganzen Zahlen n kann man die n Zahlen $1, 2, 3, \dots, n$ so in einer Reihe anordnen, dass für je zwei beliebige Zahlen der Reihe ihr arithmetisches Mittel nicht irgendwo zwischen ihnen steht?

Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.