Bundeswettbewerb Mathematik
Wissenschaftszentrum • Postfach 20 14 48 • 53144 Bonn
Fon: 0228 - 9 59 15-20 • Fax: 0228 - 9 59 15-29
e-mail: info@bundeswettbewerb-mathematik.de
www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Korrekturkommission • Karl Fegert

Aufgaben und Lösungen

2. Runde 2006

Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

Anschrift oder Email–Adresse s.o.

Stand: Oktober 2006

Aufgabe 1: Ein Kreis sei in $2n$ kongruente Sektoren eingeteilt, von denen n schwarz und die übrigen n weiß gefärbt sind. Die weißen Sektoren werden, irgendwo beginnend, im Uhrzeigersinn mit 1, 2, 3, ..., n nummeriert. Danach werden die schwarzen Sektoren, irgendwo beginnend, gegen den Uhrzeigersinn mit 1, 2, 3, ..., n nummeriert.

Man beweise, dass es n aufeinander folgende Sektoren gibt, in denen die Zahlen 1 bis n stehen.

1. Beweis: Wir bezeichnen jeden Sektor durch seine Nummer und Farbe, also etwa mit 1_w, 1_s, 2_w, 2_s, ..., n_w, n_s. Den *Abstand* zweier Sektoren i_w und i_s (i = 1, 2, ..., n) bestimmen wir, indem wir im Uhrzeigersinn und auch gegen den Uhrzeigersinn die Anzahl von Sektoren zählen, die zwischen i_w und i_s liegen und das Minimum aus diesen beiden Zahlen bestimmen; wir bezeichnen diesen Abstand mit $d(i)$. Die Sektoren, die bei dieser minimalen Zählung überstrichen werden, nennen wir *Zählstrecke* i und bezeichnen sie mit z(i). (Wenn die Anzahlen im Uhrzeigersinn und gegen den Uhrzeigersinn gleich sind, wählen wir die Zählstrecke aus, die sich beim Zählen im Uhrzeigersinn ergibt.)

Offensichtlich sind die $d(i)$ stets ganzzahlig und aus der Menge {0, 1, 2, ..., n–1}; es gibt also einen Wert $j \in$ {1, 2, ..., n} für den $d(j)$ minimal ist. Für ein solches j haben auf z(j) alle Sektoren (sofern existent) gleiche Farbe, weil andernfalls diese Zählstrecke entweder die beiden Sektoren $(j+1)_w$ und $(j+1)_s$ oder die beiden Sektoren $(j-1)_w$ und $(j-1)_s$ enthielte (dabei seien – wie bei Aufgaben dieses Typs üblich – die Zahlen $\bmod n$ betrachtet, d.h. die Zahlen k und $n+k$ werden als identisch betrachtet); deren Abstand $d(j+1)$ bzw. $d(j-1)$ wäre dann kleiner als $d(j)$ im Widerspruch zur Minimalität von $d(j)$.

O.B.d.A. seien alle diese Sektoren weiß und es verlaufe o.B.d.A. die Zählstrecke von Sektor j_w zu j_s im Uhrzeigersinn (andernfalls ersetze man im Folgenden die Bezeichnungen w durch s und umgekehrt und/oder ersetze bei den Sektorbezeichnungen ein "+" durch ein "–" und umgekehrt.)

Nun haben die auf den Sektor j_w im Uhrzeigersinn folgenden n Sektoren die zu beweisende Eigenschaft: Entweder sind alle diese n Sektoren schwarz, dann kommen darunter alle Nummern von 1 bis n genau einmal vor. Oder es gibt darunter k ($k \in$ {1, 2, ..., n–1}) weiße Sektoren und $n - k$ schwarze; die weißen haben dann die Nummern $(j+1)_w$, $(j+2)_w$, ..., $(j+k)_w$, die schwarzen die Nummern j_s, $(j-1)_s$, $(j-2)_s$, ..., $(i-(n-k+1))_s$. Dies sind genau n Zahlen, nämlich k Zahlen von j_s "aufwärts" und $n - k$ Zahlen von j_s "abwärts"; damit ist diese Zahlenmenge – $\bmod n$ betrachtet – identisch mit {1, 2, ..., n}.

2. Beweis (vollständige Induktion nach der Anzahl der Sektoren n): Wir bezeichnen jeden Sektor durch seine Nummer und Farbe, also mit 1_w, 1_s, 2_w, 2_s, ..., n_w, n_s. Zwei Radien des gegebenen Kreises nennen wir *Halbierungsradien*, wenn sie zugleich Grenzen der eingeteilten Sektoren sind und sie auf dem Kreis zwei Bereiche so begrenzen, dass jeder Bereich n aufeinander folgende Sektoren enthält und dass in jedem dieser Bereiche jede der Zahlen 1, 2, ..., n vorkommt. Die Aufgabe ist gelöst, wenn wir die Existenz von Halbierungsradien für alle n zeigen; dies geschieht durch Induktion nach n.

Zunächst stellen wir fest, dass die Kongruenz der Sektoren keine notwendige Voraussetzung für die Behauptung ist, ebenso wenig die Forderung, dass die Sektoren lückenlos aufeinander folgen; sie dürfen sich lediglich nicht überlagern.

<u>Induktionsanfang</u>: Die Aussage ist richtig für n = 1: In diesem Fall hat man einen weißen und einen schwarzen Halbkreis; deren gemeinsamer Durchmesser besteht offensichtlich aus zwei Halbierungsradien.

<u>Induktionsannahme</u>.: Die Aussage sei richtig für ein bestimmtes n, d.h. zu $2n$ Sektoren, die gemäß Aufgabenstellung gefärbt und nummeriert sind, gibt es stets zwei Halbierungsradien.

<u>Induktionsschluss</u>: Dann ist die Aussage auch richtig für n + 1:

Sei also der Kreis in $2(n+1)$ Sektoren aufgeteilt, die gemäß Aufgabenstellung gefärbt und nummeriert sind. Wir betrachten zunächst nur die von 1 bis n nummerierten Sektoren. Nach Induktionsannahme – zusammen mit der Bemerkung im 2. Absatz – gibt es zu diesen $2n$ Sektoren zwei Halbierungsradien. Wir untersuchen die Lage dieser beiden Halbierungsradien relativ zu den Sektoren $(n+1)_w$ und $(n+1)_s$, dabei gibt es nur die folgenden beiden Möglichkeiten:

Fall 1: Die beiden Sektoren $(n+1)_w$ und $(n+1)_s$ liegen in verschiedenen durch die Halbierungsradien definierten Bereichen des Kreises: Dann sind die Halbierungsradien zu den Sektoren 1_w,

1_s, 2_w, 2_s, ..., n_w, n_s auch Halbierungsradien zu den Sektoren 1_w, 1_s, 2_w, 2_s, ..., n_w, n_s, $(n+1)_w$, $(n+1)_s$.

Fall 2: Die beiden Sektoren $(n+1)_w$ und $(n+1)_s$ liegen im gleichen der zwei durch die Halbierungsradien bestimmten Bereiche: Dann bestimmen auch umgekehrt die beiden Sektoren $(n+1)_w$ und $(n+1)_s$ zwei Bereiche, von denen einer keinen Halbierungsradius enthält; o.B.d.A. sei dies der Bereich, der überstrichen wird, wenn man von $(n+1)_w$ im Uhrzeigersinn zu $(n+1)_s$ geht.

Hätte dieser Bereich Sektoren von beiden Farben, dann enthielte er auch die beiden Sektoren 1_w und 1_s; zwischen diesen müsste nach Induktionsannahme ein Halbierungsradius sein, was aber im Widerspruch zur Fallbeschreibung steht.

Sofern es im Bereich zwischen den Sektoren $(n+1)_w$ und $(n+1)_s$ Sektoren gibt, sind diese also alle von gleicher Farbe, o.B.d.A. seien diese Sektoren alle weiß und der Bereich werde von $(n+1)_w$ nach $(n+1)_s$ im Uhrzeigersinn überstrichen.

Nun betrachten wir die $n+1$ Sektoren, die dem Sektor $(n+1)_w$ im Uhrzeigersinn folgen. Nach der Aussage des vorigen Absatzes ist der erste schwarze Sektor dabei der Sektor $(n+1)_s$; der erste weiße Sektor – sofern existent – ist der Sektor 1_w. Insgesamt gibt es unter diesen $n+1$ Sektoren also k schwarze und $n–k+1$ weiße Sektoren für ein bestimmtes ganzzahliges k mit $1 \le k \le n+1$. Dem Uhrzeigersinn folgend haben also die schwarzen Sektoren die Nummern $(n+1)_s$, $(n+1–1)_s$, ... $(n–k+2))_s$; die weißen Sektoren – soweit existent – die Nummern 1_w, 2_w, ..., $(n–k+1)_w$. Damit enthalten diese Sektoren genau die Nummern 1, 2, ..., $n – k + 1$, $n – k + 1$, ..., $n+1$; das war zu zeigen.

3. Beweis (konstruktive Lösung): Wir bezeichnen die Sektorengrenzen fortlaufend im Uhrzeigersinn mit r_0, r_1, ..., $r_{2n–1}$, und zwar so, dass r_0 bei Rotation im Uhrzeigersinn nach r_1 den mit 1 nummerierten weißen Sektor überstreicht. Weiter betrachten wir zu einem gegebenen i die auf r_i im Uhrzeigersinn folgenden Sektoren; mit $w(i)$ bezeichnen wir die Nummer des ersten weißen Sektors, mit $s(i)$ die Nummer des ersten schwarzen Sektors. Mit dieser Bezeichnung haben die auf die Sektorengrenze r_i im Uhrzeigersinn folgenden weißen Sektoren die fortlaufenden Nummern $w(i)$, $w(i)+1$, $w(i)+2$, ..., evtl. $w(i) + k – n$, usw.; die auf die Sektorengrenze i im Uhrzeigersinn folgenden schwarzen Sektoren die Nummern $s(i)$, $s(i)–1$, $s(i)–2$, ... , evtl. $s(i) – k + n$, usw.

Nun betrachten wir die n Sektoren, die auf die Sektorengrenze r_0 im Uhrzeigersinn folgen, und unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: Alle diese n aufeinander folgenden Sektoren sind weiß. Dann enthalten diese auch alle Nummern 1, 2, ..., n; wir haben damit den geforderten Nachweis geführt.

Fall 2: Es gibt darunter mindestens einen schwarzen Sektor.

Wie weiter unten gezeigt, gibt es dann ein $j \in \{1, 2, ..., n–1\}$, für das $w(j) – 1 = s(j)$. Aus der Definition der $s(i)$ und $w(i)$ folgt dann, dass von den auf r_j im Uhrzeigersinn folgenden n Sektoren die weißen die Nummern $w(i)$, $w(i)+1$, $w(i)+2$, ... $w(i) + k – 1$, die schwarzen die Nummern $s(i) = w(i) – 1$, $w(i) – 2$, ..., $w(i) – (n–k)$ für ein geeignetes $k \in \{0, 1, ..., n–1\}$ haben. Dies sind aber gerade die Zahlen $\{1, 2, ..., n\}$.

Zum Nachweis der Existenz des j mit der genannten Eigenschaft betrachten wir die Funktion $f(i) := s(i) – w(i)$ und zeigen, dass diese für ein geeignetes j den Wert –1 annimmt:

Zunächst gilt stets eine der Beziehungen

(1) $w(i+1) = w(i)$	nämlich genau dann, wenn der auf r_i im Uhrzeigersinn folgende Sektor schwarz ist;
(2) $w(i+1) = w(i) + 1$	nämlich genau dann, wenn der auf r_i im Uhrzeigersinn folgende Sektor weiß und $w(i) \neq n$ ist
(3) $w(i+1) = 1$	nämlich genau dann, wenn der auf r_i im Uhrzeigersinn folgende Sektor weiß und $w(i) = n$ ist.

Entsprechend gilt

(1s) $s(i+1) = s(i)$ oder

(2s) $s(i+1) = s(i) - 1$ und $s(i) \neq 1$ oder

(3s) $s(i+1) = n$ und $s(i) = 1$.

Der Fall (3) tritt für kein $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$ ein: Aus der Konstruktion der $w(i)$ folgt sofort, dass $w(0) = 1$ und $w(1) = 2$. Aus (1), (2) und (3) folgt, dass $w(i) \leq i+1$ für alle $i \in \{0, ..., n-1\}$. Da unter den n genannten Sektoren mindestens ein schwarzer ist, tritt – wenn i der Reihe nach die Werte 1, 2, ..., $n-1$ annimmt – mindestens einmal der Fall (2) ein.

Daher gilt $w(i) \leq n$ für alle $i \in \{0, 1, ..., n\}$.

Solange $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$ und der Fall (3s) nie eintritt, ist $f(i+1) = s(i+1) - w(i+1) = s(i) - w(i) - 1 = f(i) - 1$; d.h. $f(i)$ nimmt um genau 1 ab, wenn i um 1 zunimmt. Da $w(0) = 1$ und $1 \leq s(0) \leq n$, also $f(0) \leq n-1$, ist $f(n) = f(0+n) = f(0) - n \leq (n-1) - n = -1$; also ist $f(j) = -1$ für irgend ein $j \leq n$.

Wenn aber der Fall (3s) eintritt, d.h. wenn es ein i mit $s(i) = 1$ gibt und der auf r_{i+1} folgende Sektor schwarz ist, gibt es ebenfalls ein $j \leq i$ mit $f(i) = -1$: Es ist nämlich $s(0) = s(1) \geq 1$. Falls $s(0) = s(1) = 1$, ist $f(1) = s(1) - w(1) = 1 - 2 = -1$. Falls $s(1) > 1$ und es ein $i \geq 2$ mit $s(i) = 1$ und $s(i+1) = n$ gibt, tritt für alle $j < i$ der Fall (3s) nicht ein; d.h. es ist $f(j+1)=f(j)-1$. Wegen $w(j) \leq w(i)$ und $s(j) \geq s(i)$ für alle $j < i$ gilt die Abschätzung $f(i) = s(i) - w(i) \leq s(i) - w(j) \leq 1 - 2 = -1$, d.h. es gibt bereits ein $j \leq i$ mit $f(j) = -1$.

Bemerkung: Die Konstruktion des 3. Beweises führt zu genau einer Teilungsmöglichkeit. Es kann aber vorkommen, dass es noch mehr Teilungsmöglichkeiten gibt; z.B. führt die Konstruktion zur Teilung 1 2 3 4 ***6 5* | *4 3 2 1 8 7*** 5 6 | 7 8; es gibt aber auch noch die Teilung 1 2 3 4 **|** ***6 5 4 3 2 1 8 7*** **|** 5 6 7 8.

Aufgabe 2: Man bestimme alle reellwertigen Funktionen f, die auf der Menge der positiven rationalen Zahlen definiert sind, dort positive Funktionswerte besitzen und die die Gleichung

$$f(x)+f(y)+2xy\cdot f(xy)=\frac{f(xy)}{f(x+y)} \quad \text{für alle positiven rationalen } x,\, y$$

erfüllen.

Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Gemeinsame Bezeichnungen: Mit $\mathbb{Q}^+$ sei die Menge der positiven rationalen Zahlen bezeichnet.

Ergebnis: f erfüllt die geforderten Bedingungen $\Leftrightarrow$ $f: x \to \frac{1}{x^2}$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$.

1. Beweis:

"$\Leftarrow$": f ist auf $\mathbb{Q}^+$ definiert, reellwertig, alle Funktionswerte sind positiv und einfaches Nachrechnen bestätigt, dass auch die in der Aufgabe vorgegebene Funktionalgleichung erfüllt ist; es ist nämlich

$$f(x)+f(y)+2xy\cdot f(xy) = \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+2xy\cdot\frac{1}{x^2y^2} = \frac{y^2+x^2+2xy}{x^2y^2} = \frac{\frac{1}{x^2y^2}}{\frac{1}{y^2+x^2+2xy}}$$

$$= \frac{\frac{1}{(xy)^2}}{\frac{1}{(x+y)^2}} = \frac{f(xy)}{f(x+y)} \quad \text{für alle } x,y \in \mathbb{Q}^+.$$

"$\Rightarrow$": Wir weisen schrittweise die notwendigen Eigenschaften (A) bis (H) der Funktion f nach, die aus der Aufgabenstellung folgen, und weisen dadurch nach, dass es außer $f: x \to \frac{1}{x^2}$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$ keine weitere Funktion geben kann, die die geforderten Eigenschaften hat.

Dabei benützen wir die in der Aufgabenstellung angegebene Funktionalgleichung

$$f(x)+f(y)+2xy\cdot f(xy)=\frac{f(xy)}{f(x+y)} \quad \text{für alle } x,y \in \mathbb{Q}^+ \qquad (*)$$

gelegentlich in der äquivalenten Form (Division durch $f(xy) \neq 0$ ist eine Äquivalenzumformung!)

$$\frac{f(x)}{f(xy)}+\frac{f(y)}{f(xy)}+2xy=\frac{1}{f(x+y)} \quad \text{für alle } x,y \in \mathbb{Q}^+. \qquad (*')$$

(A) $f(2)=\frac{1}{4}$: Wir setzen $x = y = 1$ und erhalten so aus (*') die notwendige Bedingung

$$\frac{f(1)}{f(1\cdot 1)}+\frac{f(1)}{f(1\cdot 1)}+2\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{f(1+1)} \text{ oder } 1+1+2 = \frac{1}{f(2)}\text{, also direkt (A).}$$

(B) $f(4)=\frac{1}{16}$: Wir setzen $x = y = 2$ und erhalten so aus (*) $f(2)+f(2)+2\cdot 2\cdot 2\cdot f(2\cdot 2)=\frac{f(2\cdot 2)}{f(2+2)}$

zusammen mit (A) die notwendige Bedingung $8f(4)=1-2f(2) = \frac{1}{2}$, woraus sofort (B) folgt.

(C) $f(x+1) = \dfrac{1}{\frac{f(1)}{f(x)}+2x+1}$ für alle $x \in \mathbb{Q}^+$:

Wir setzen $y = 1$; die Gleichung (*') lautet dann $\frac{f(x)}{f(x\cdot 1)}+\frac{f(1)}{f(x\cdot 1)}+2x\cdot 1=\frac{1}{f(x+1)}$

oder äquivalent $1+\frac{f(1)}{f(x)}+2x=\frac{1}{f(x+1)}$, woraus sofort (C) folgt.

(D) $f(1)=1$: Wir schreiben (C) mit $x = 2$, dies ergibt zusammen mit (A) die notwendige Bedingung $f(3) = \frac{1}{\frac{f(1)}{f(2)}+2\cdot 2+1} = \frac{1}{4f(1)+5}$;

schreibt man (C) mit $x = 3$, ergibt sich andererseits zusammen mit (B)

$f(4) = \frac{1}{\frac{f(1)}{f(3)}+2\cdot 3+1}$ oder $\frac{1}{16} = \frac{1}{\frac{f(1)}{f(3)}+7}$, was wir umformen zu $16=\frac{f(1)}{f(3)}+7$

oder $f(3) = \frac{f(1)}{9}$.

Gleichsetzen ergibt $\frac{1}{4f(1)+5} = \frac{f(1)}{9}$, also äquivalent $4[f(1)]^2 + 5f(1) – 9 = 0$ oder auch $[f(1) – 1]\cdot[f(1) + 9] = 0$. Hieraus erhält man – da $f(x) > 0$ vorausgesetzt wird – als einzige mögliche Lösung und damit als notwendige Bedingung $f(1) = 1$.

(E) $f(x+k) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}+2kx+k^2}$ für alle $x\in \mathbb{Q}^+$ und alle positiven ganzen k:

Dies beweisen wir mit vollständiger Induktion nach k: Die Aussage ist richtig für alle $x\in \mathbb{Q}^+$ und $k = 1$ (das ist dann wegen (D) gerade die Aussage (C)); und wenn sie richtig für alle $x\in \mathbb{Q}^+$ und ein bestimmtes k ist, so erhalten wir wieder mit (C)

$$f(x+(k+1)) = f((x+k)+1)) = \frac{1}{\frac{1}{f(x+k)}+2(x+k)+1} =$$

$$\frac{1}{\frac{1}{f(x)}+2kx+k^2+2(x+k)+1}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{f(x)}+2(k+1)x+(k+1)^2}$$, also die Richtigkeit für $(k+1)$ und alle $x\in \mathbb{Q}^+$.

(F) $f(n) = \frac{1}{n^2}$ für alle positiven ganzen Zahlen n :

Dies beweisen wir mit vollständiger Induktion nach n: Die Aussage ist mit (C) und (D) richtig für $n = 1$; und wenn sie richtig für ein bestimmtes n ist, dann ist mit (C)

$$f(n+1) = \frac{1}{\frac{f(1)}{f(n)}+2n+1} = \frac{1}{1\cdot n^2+2n+1} = \frac{1}{(n+1)^2},$$

d.h. die Aussage ist auch richtig für $n+1$.

(G) $f(\frac{1}{n}) = n^2$ für alle positiven ganzen Zahlen n:

Wir setzen in der Funktionsgleichung $x = n,\ y = \frac{1}{n}$ und erhalten so aus (*) mit (F), (C) und (D) die notwendige Bedingung

$$f(n) + f(\frac{1}{n}) + 2\cdot n\cdot\frac{1}{n} = \frac{f(n\cdot\frac{1}{n})}{f(n+\frac{1}{n})}, \text{ also } \frac{1}{n^2} + f(\frac{1}{n}) + 2 = \frac{1}{f(n+\frac{1}{n})};$$

andererseits ist mit (E)

$$f(\frac{1}{n}+n) = \frac{1}{\frac{1}{f(\frac{1}{n})} + 2n\frac{1}{n} + n^2}.$$

Dies setzen wir auf der rechten Seite ein und erhalten die notwendige Bedingung $\frac{1}{n^2} + f(\frac{1}{n}) + 2 = \frac{1}{f(\frac{1}{n})} + 2n\frac{1}{n} + n^2$; diese führt nach Multiplikation mit $f(\frac{1}{n}) \neq 0$ zu

$$f(\frac{1}{n})^2 + f(\frac{1}{n})\,(\frac{1}{n^2} - n^2) - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad (f(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n^2})\cdot(f(\frac{1}{n}) - n^2) = 0.$$

Hieraus erhält man – da $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{Q}^+$ vorausgesetzt wird – als einzige mögliche Lösung und damit als notwendige Bedingung $f(\frac{1}{n}) = n^2$.

(H) $f(\frac{m}{n}) = \frac{n^2}{m^2}$ für alle positiven ganzen Zahlen m, n:

Dies beweisen wir wieder mit vollständiger Induktion, diesmal nach m: Die Aussage ist richtig für $m = 1$ und alle positiven ganzen Zahlen n (dann ist sie nämlich identisch mit (G)); und wenn sie für ein bestimmtes m und alle positiven ganzen Zahlen n richtig ist, dann folgt mit $x = \frac{m}{n}$ und $y = \frac{1}{n}$ aus (*') und (G)

$$\frac{1}{f(\frac{m+1}{n})} = \frac{1}{f(\frac{m}{n}+\frac{1}{n})} = \frac{f(\frac{m}{n})}{f(\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{n})} + \frac{f(\frac{1}{n})}{f(\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{n})} + 2\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \frac{\frac{n^2}{m^2}}{\frac{n^4}{m^2}} + \frac{n^2}{\frac{n^4}{m^2}} + 2\frac{m}{n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{m^2}{n^2} + 2\frac{m}{n^2}$$

$$= \frac{(m+1)^2}{n^2}$$; nach Kehrwertbildung (erlaubt, da $m + 1$ nicht den Wert 0 annimmt) erhalten wir so die Richtigkeit der Aussage für m+1 und alle positiven ganzen Zahlen n.

Da jedes $x \in \mathbb{Q}^+$ in der Form $\frac{m}{n}$ mit positiven ganzen Zahlen m, n dargestellt werden kann, ist mit dem Nachweis von (H) der Beweis abgeschlossen.

2. Beweis (Verallgemeinerung für alle $x \in \mathbb{R}^+$): Mit der gleichen Argumentation wie im 1. Beweis weisen wir zunächst nach, dass die Funktion $f: x \to \frac{1}{x^2}$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ die gegebene Funktionalgleichung sogar für alle $x \in \mathbb{R}^+$ erfüllt und dort nur positive Funktionswerte besitzt. Umgekehrt können wir ebenfalls mit der gleichen Argumentation wie im 1. Beweis zeigen, dass jede Funktion f auf den reellen Zahlen mit den geforderten Eigenschaften auch folgende Bedingungen erfüllen muss:

(A) $f(2)=\frac{1}{4}$; (B) $f(4)=\frac{1}{16}$; (D) $f(1)=1$ sowie

(E) $f(x+k) = \dfrac{1}{\frac{1}{f(x)}+2kx+k^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ und k = 1, 2, 3.

Aus dem Beweis zu (D) folgern wir $f(3) = \frac{f(1)}{9} = \frac{1}{9}$;

insbesondere gilt also (K) $f(k) = \frac{1}{k^2}$ für k = 1, 2, 3.

Nun setzen wir in der Funktionalgleichung $y = k$ und erhalten so (da $f(x) > 0$ vorausgesetzt wird, wird nie durch 0 dividiert)

$$f(x)+f(k)+2kx\cdot f(kx) = \frac{f(kx)}{f(x+k)};$$

$$\Rightarrow \quad f(x)+f(k)+2kx\cdot f(kx) = f(kx)\cdot\left(\frac{1}{f(x)}+2kx+k^2\right) \text{ für } k = 1, 2, 3 \text{ (wg. (E))};$$

$$\Rightarrow \quad f(x)+f(k) = f(kx)\cdot\left(\frac{1}{f(x)}+2kx-2kx+k^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)}{k^2}\cdot\frac{f(x)+f(k)}{f(x)+\frac{1}{k^2}} = f(kx).$$

Dabei hat nach (K) der zweite Bruch auf der linken Seite für k = 1, 2, 3 den Wert 1. Die Funktion f muss also auch die Bedingung

(L) $\frac{f(x)}{k^2} = f(kx)$ für k = 1, 2, 3 erfüllen.

Nun setzen wir in der Funktionalgleichung $x = y$ und erhalten so

$$f(x)+f(x)+2x^2\cdot f(x^2) = \frac{f(x^2)}{f(2x)}$$

$$\Rightarrow \quad 2f(x)+2x^2\cdot f(x^2) = \frac{4f(x^2)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow \quad 2\left(f(x)\right)^2+2x^2\cdot f(x)\cdot f(x^2) = 4f(x^2)$$

$$\Rightarrow \quad \text{(M)} \quad 2\left(f(x)\right)^2 = \left(4-2x^2\cdot f(x)\right)f(x^2) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Andererseits folgt mit $x = 2y$

$$f(x)+f(2x)+4x^2\cdot f(2x^2) = \frac{f(2x^2)}{f(3x)}$$

$$\Rightarrow \quad f(x)+\frac{1}{4}f(x)+4x^2\cdot\frac{1}{4}f(x^2) = \frac{9f(x^2)}{4f(x)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{4}f(x)+x^2 f(x^2) = \frac{9f(x^2)}{4f(x)}$$

$$\Rightarrow \quad 5\left(f(x)\right)^2+4x^2 f(x)f(x^2) = 9f(x^2)$$

$$\Rightarrow \quad \text{(N)} \quad 5\left(f(x)\right)^2 = \left(9-4x^2 f(x)\right)f(x^2) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die Bedingung (M) multiplizieren wir mit 5, die Bedingung (N) mit 2, setzen gleich und erhalten

$$
\begin{aligned}
& 5\left(4-2x^2\cdot f(x)\right) f(x^2) &&= 2\left(9-4x^2 f(x)\right) f(x^2)\text{; nach Division durch } f(x^2)\neq 0\\
\Rightarrow\quad & 20-10x^2\cdot f(x) &&= 18-8x^2 f(x)\\
\Rightarrow\quad & 2 &&= 2\,x^2 f(x)\\
\Rightarrow\quad & f(x) &&= \frac{1}{x^2}\quad \text{für alle } x\in\ \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC und ein beliebiger Punkt P im Innern des Dreiecks. Die Lotfußpunkte von P auf die Seiten AB, BC und CA seien C', A' bzw. B'.

Bei welchen Lagen von P gelten $\angle BAC = \angle B'A'C'$ und $\angle CBA = \angle C'B'A'$?

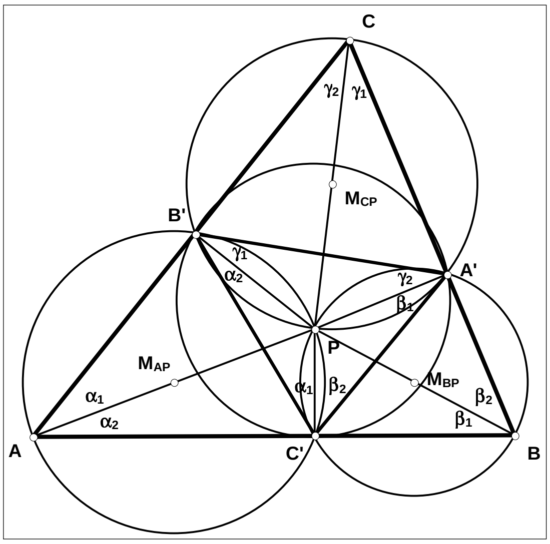
Anmerkung: Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Gemeinsame Bezeichnungen: Um den Text leichter lesbar zu machen, werden wir gelegentlich die Innenwinkel der Dreiecke ΔABC bzw. $\Delta A'B'C'$ wie üblich mit α, β, γ bzw. α', β', γ' bezeichnen.

Ergebnis: Es ist $\angle BAC = \angle B'A'C'$ und $\angle CBA = \angle C'B'A'$ $\Leftrightarrow$ P ist Umkreismittelpunkt von ΔABC.

1. Beweis: Die Bedingung ist **hinreichend**: Sei P der Umkreismittelpunkt von ΔABC. Dann hat P insbesondere von Ecke A und B die gleiche Entfernung, liegt also auf der Mittelsenkrechten von AB. Damit fällt der Fußpunkt des Lotes von P auf die Seite AB (also C') mit dem Mittelpunkt dieser Dreiecksseite zusammen. Analog folgert man, dass B' die Mitte von Seite AC und A' die Mitte der Seite BC ist. Damit ist das Dreieck $\Delta A'B'C'$ das Mittendreieck von ΔABC; bekanntlich sind diese beiden Dreiecke ähnlich; insbesondere sind dann auch entsprechende Innenwinkel gleich; dies war zu zeigen.

Die Bedingung ist **notwendig**: Sei $\angle BAC = \angle B'A'C'$ und $\angle CBA = \angle C'B'A'$.



Nach Konstruktion ist $\angle PC'A = \angle AB'P = 90°$; damit liegen C' und B' beide auf dem Thaleskreis über der Strecke AP. Auf diesem Thaleskreis liegen insbesondere die Punkte C', B' und A; damit enthält dieser Thaleskreis den Fasskreisbogen über der Sehne C'B' zum Winkel $\angle C'AB'$.

Da die Punkte B' und C' auf den Schenkeln sowohl von α also auch von α' liegen, folgt aus der Voraussetzung $\alpha = \alpha'$ sofort, dass die beiden Fasskreisbögen über C'B' zu den Winkeln α bzw. α' gleichen Durchmesser haben. Also hat das Dreieck $\Delta AC'B'$ einen Umkreis, dessen Durchmesser – nämlich PA – so groß ist wie der des Umkreises von Dreieck $\Delta A'B'C'$.

Mit analoger Schlussweise erhält man: Aus $\beta = \beta'$ folgt, dass auch das Dreieck $\Delta BA'C'$ einen Umkreis hat, dessen Durchmesser – nämlich PB – so groß ist wie der des Umkreises von Dreieck $\Delta B'C'A'$.

Schließlich folgt aus $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$, dass $\gamma = \gamma'$; und hieraus wie oben, dass auch das Dreieck $\Delta CB'A'$ einen Umkreis hat, dessen Durchmesser – nämlich PC – so groß ist wie der des Umkreises des Dreiecks $\Delta C'A'B'$. Insgesamt ist also $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$; dies ist gleichbedeutend damit, dass P der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ΔABC ist.

Variante für den Nachweis, dass die Bedingung notwendig ist (Sinussatz): Mit r sei der Radius des Umkreises von Dreieck $\Delta A'B'C'$ bezeichnet. Nach Sinussatz gilt

$$2r = \frac{\overline{B'C'}}{\sin(\alpha')} = \frac{\overline{A'C'}}{\sin(\beta')} = \frac{\overline{B'C'}}{\sin(\gamma')} .$$

Nach Konstruktion sind im Viereck AC'PB' bei C' und bei B' rechte Winkel; damit liegen C' und B' auf dem Thaleskreis über der Strecke AP. Also ist AP Durchmesser des Umkreises von Dreieck $\Delta AC'B'$; aus diesem Dreieck erhalten wir so mit Sinussatz

$$\overline{AP} = \frac{\overline{B'C'}}{\sin(\alpha)}\text{; analog } \overline{BP} = \frac{\overline{A'C'}}{\sin(\beta)} \text{ und } \overline{CP} = \frac{\overline{B'C'}}{\sin(\gamma)}.$$

Sei nun $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$. Dann ist mit Satz von der Innenwinkelsumme im Dreieck auch $\gamma = \gamma'$ und es folgt mit Sinussatz

$$\overline{AP} : \overline{BP} : \overline{CP} = \frac{\overline{B'C'}}{\sin(\alpha)} : \frac{\overline{A'C'}}{\sin(\beta)} : \frac{\overline{B'C'}}{\sin(\gamma)} = \frac{\overline{B'C'}}{\sin(\alpha')} : \frac{\overline{A'C'}}{\sin(\beta')} : \frac{\overline{B'C'}}{\sin(\gamma')} = 2r : 2r : 2r.$$

Insbesondere ist $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$, d.h. P ist gleichweit von A, B und C entfernt und damit Umkreismittelpunkt von ΔABC.

2. Beweis: Nach Konstruktion ist $\angle PC'A = \angle AB'P = 90°$; damit liegen C' und B' beide auf dem Thaleskreis über der Strecke AP. Das Viereck AC'PB' ist also ein Sehnenviereck. Ferner liegen P und A in verschiedenen Halbebenen bzgl. der Geraden B'C'; entsprechend liegen P und B bzw. P und C in verschiedenen Halbebenen bzgl. A'C' bzw. A'B'. Hieraus folgt, dass P auch im Innern von $\Delta A'B'C'$ liegt.

Da P im Innern von ΔABC liegt, teilen die Strecken PA, PB, PC die Winkel α, β und γ jeweils in zwei Teilwinkel, die wir in kanonischer Weise mit α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 bezeichnen. Ebenso teilen die Strecken PA', PB', PC' die Winkel α', β' und γ' jeweils in zwei Teilwinkel auf.

A' und B liegen auf dem gleichen Kreisbogen über PC', ebenso liegen A' und C auf dem gleichen Kreisbogen über PB'. Nach Umfangswinkelsatz haben damit die beiden Teilwinkel bei A' die Weite β_1 bzw. γ_2.

"⇒":

Wenn P der Umkreismittelpunkt von ΔABC ist, dann ist $\overline{AP} = \overline{BP}$, also ist das Dreieck ΔAPB gleichschenklig und somit $\alpha_2 = \beta_1$; mit analoger Schlussweise ist $\alpha_1 = \gamma_2$. Also ist $\alpha' = \beta_1 + \gamma_2 = \alpha_2 + \alpha_1 = \alpha$; mit analoger Schlussweise folgt $\beta' = \beta$ und $\gamma' = \gamma$.

"⇐":

Wenn P nicht Umkreismittelpunkt von ΔABC ist, nehmen wir o.B.d.A. an, dass $\overline{PB} \neq \overline{PA}$ und weiter o.B.d.A. sogar $\overline{PB} < \overline{PA}$. Im Dreieck ΔAPB liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber, es ist also $\beta_1 > \alpha_2$.

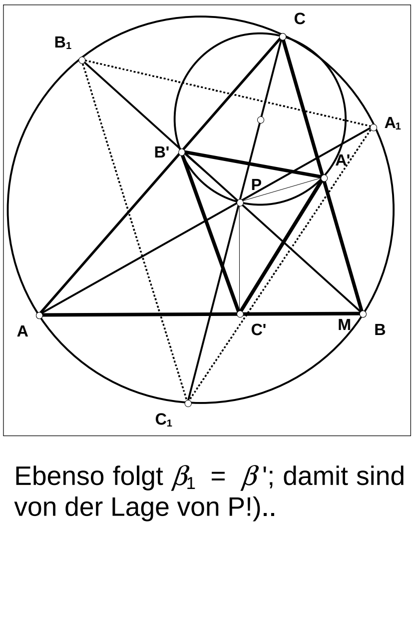
Die Annahme $\alpha' = \alpha$ und $\beta' = \beta$ führen wir nun folgendermaßen zum Widerspruch:

Aus $\alpha' = \alpha$, also $\beta_1 + \gamma_2 = \alpha_2 + \alpha_1$, folgt mit $\beta_1 > \alpha_2$ sofort $\gamma_2 < \alpha_1$, also $\overline{PA} < \overline{PC}$.

Aus $\beta' = \beta$ und $\alpha' = \alpha$ folgt $\gamma' = \gamma$, also auch $\alpha_1 + \beta_2 = \gamma_2 + \gamma_1$, zusammen mit $\gamma_2 < \alpha_1$ folgt $\beta_2 < \gamma_1$, also $\overline{PC} < \overline{PB}$.

Zusammengesetzt ergibt sich der Widerspruch $\overline{PB} < \overline{PA} < \overline{PC} < \overline{PB}$.

3. Beweis (mit Hilfsdreieck; verkürzt, da einige Lagebeziehungen nicht diskutiert): Die Gerade AP schneidet den Umkreis von ΔABC in einem von A verschiedenen Punkt; diesen bezeichnen wir mit A_1;



entsprechend bezeichnen wir mit B_1 und C_1 die von B und C verschiedenen Schnittpunkte von BP und CP mit dem Umkreis von ΔABC. Nach Konstruktion ist der Umkreis von ΔABC gleichzeitig Umkreis von $\Delta A_1B_1C_1$.

Da das Viereck PA'CB' bei A' und B' einen rechten Winkel besitzt, ist der Thaleskreis über der Strecke PC gleichzeitig Umkreis dieses Vierecks.

Nach Umfangswinkelsatz (Sehnen AC_1 bzw. B'P) und nach Konstruktion ($B' \in CA$ und $P \in CC_1$) gelten nun folgende Identitäten:

$$\angle AA_1C_1 = \angle ACC_1 = \angle B'CP = \angle B'A'P.$$

mit analoger Schlussweise auch $\angle B_1A_1A = \angle B_1BA = \angle PBC' = \angle PA'C'$; damit ist $\alpha_1 = \alpha'$.

Ebenso folgt $\beta_1 = \beta'$; damit sind die Dreiecke $\Delta A'B'C'$ und $\Delta A_1B_1C_1$ gleichsinnig ähnlich (unabhängig von der Lage von P!)..

Falls nun $\alpha = \alpha'$ und auch $\beta = \beta'$, so sind alle drei Dreiecke gleichsinnig ähnlich. Da ΔABC und $\Delta A_1B_1C_1$ den gleichen Umkreis haben, sind diese beiden Dreiecke sogar gleichsinnig kongruent, insbesondere sind A_1B_1 und AB Sehnen gleicher Länge am gleichen Kreis. Damit liegen sie achsensymmetrisch zur Mittelsenkrechten der Strecke AB_1 (die identisch mit der Mittelsenkrechten der Strecke A_1B ist); der Schnittpunkt der anderen Verbindungsgeraden der Endpunkte – also P – muss ebenfalls auf dieser Mittelsenkrechten liegen.

Auch die Strecken B_1C_1 und BC sind Sehnen gleicher Länge am gleichen Kreis, also liegt P auch auf der Mittelsenkrechten von C_1B. Damit ist P der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zweier verschiedener, nicht-paralleler Sehnen und somit notwendigerweise der Umkreismittelpunkt.

Ist umgekehrt P der Umkreismittelpunkt, so ist $\Delta A'B'C'$ das Mittendreieck von ΔABC, diese beiden Dreiecke sind bekanntlich ähnlich.

Aufgabe 4: Eine positive ganze Zahl heiße *ziffernreduziert*, wenn in ihrer Dezimaldarstellung höchstens neun verschiedene Ziffern vorkommen. (Dabei werden führende Nullen nicht berücksichtigt.)

Es sei M eine endliche Menge ziffernreduzierter Zahlen.

Man beweise, dass die Summe der Kehrwerte der Zahlen aus M kleiner als 180 ist.

Gemeinsame Bezeichnungen: Mit Z_n sei die Menge der positiven ganzen Zahlen mit n Stellen bezeichnet, also die Menge der positiven ganzen Zahlen im Intervall $[10^{n-1};10^n-1]$.

Mit R_n sei die Menge der ziffernreduzierten Zahlen mit n Stellen ($n \geq 1$) bezeichnet.

Schließlich bezeichnen wir für eine Menge A von positiven ganzen Zahlen die Summe der Kehrwerte der Zahlen aus A mit Σ(A).

1. Beweis: Wir zeigen zunächst, dass

(A) $\Sigma(R_n) < 2{,}83$ für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$:

Es ist $R_n \subset Z_n$, also auch stets $\Sigma(R_n) \leq \Sigma(Z_n)$, also

$$\begin{aligned}\Sigma(R_1) &\leq \Sigma(Z_1) = \sum_{i=1}^{9}\frac{1}{i} = 1 + 0{,}5 + \frac{6}{18} + 0{,}25 + 0{,}2 + \frac{3}{18} + \frac{1}{7} + 0{,}125 + \frac{2}{18}\\ &= 2{,}075 + \frac{11}{18} + \frac{1}{7} = 2{,}075 + \frac{(11\cdot 7+18)\cdot 8}{(18\cdot 7)\quad\cdot 8} = 2{,}075 + \frac{760}{1008}\\ &= 2{,}075 + \frac{705{,}6+54{,}4}{1008} < 2{,}075 + 0{,}7 + 0{,}055 = 2{,}830.\end{aligned}$$

Für $n > 1$ fassen wir in $\Sigma(Z_n)$ die Kehrwerte von ganzen Zahlen mit gleicher Anfangsziffer zusammen und erhalten so 9 Teilsummen mit jeweils 10^{n-1} Summanden; in jeder dieser Teilsummen ersetzen wir jeden Summanden durch den jeweils größten. Es ergibt sich

$$\Sigma(R_n) \leq \Sigma(Z_n) \leq \sum_{j=1}^{9}\left(10^{n-1}\cdot\frac{1}{j\cdot 10^{n-1}}\right) = \sum_{j=1}^{9}\frac{1}{j} < 2{,}830.$$

Nun zeigen wir, dass auch

(B) $\Sigma(R_n) < 100 \cdot 0{,}9^n$ für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$:

Mit D_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, 9$) sei die Menge der Ziffern ohne die Ziffer i, also $\{0, 1, \ldots, 9\} \setminus \{i\}$ bezeichnet; mit T_i die Menge der n – Tupel aus der Menge D_i. (Aus praktischen Gründen wird hier auf die eigentlich notwendige Angabe des Parameters n verzichtet.) Jede ziffernreduzierte Zahl mit n Stellen kann als ein solches n–Tupel aus mindestens einem der T_i aufgefasst werden. Nach bekannter Formel ist $|T_i| = 9^n$ und somit $|R_n| \leq \sum_{i=0}^{9}|T_i| = 10 \cdot 9^n$.

In R_n ist keine Zahl kleiner als 10^{n-1}, also ist in $\Sigma(R_n)$ kein Summand größer als $\frac{1}{10^{n-1}}$. Man kann also (sehr grob!) abschätzen:

$$\Sigma(R_n) \leq |R_n|\frac{1}{\min(R_n)} \leq 10\cdot 9^n\cdot\frac{1}{10^{n-1}} = 100 \cdot 0{,}9^n.$$

Mit diesen beiden Abschätzungen (die erste verwenden wir für Zahlen mit höchsten s Stellen, die zweite für Zahlen mit mehr als s Stellen) können wir nun den eigentlichen Beweis formulieren: Die größte Zahl aus M habe nicht mehr als r Ziffern, es ist dann für jedes $s < r$ unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe

$$\Sigma(M) \leq \sum_{i=1}^{r}\Sigma(R_i) = \sum_{i=1}^{s}\Sigma(R_i) + \sum_{i=s+1}^{r}\Sigma(R_i) \leq 2{,}83\, s + \sum_{i=s+1}^{r}100\cdot 0{,}9^i$$

$$\leq 2{,}83\,s + 100\cdot 0{,}9^{s+1}\sum_{i=0}^{\infty} 0{,}9^i = 2{,}83\,s + 100\cdot 0{,}9^{s+1}\frac{1}{1-0{,}9}$$

$$= 2{,}83\,s + 900\cdot 0{,}9^s.$$

Für z.B. $s = 32$ ist dieser Wert tatsächlich kleiner als 180, was man leicht nachrechnet:

$$\begin{aligned}\Sigma(M) &\leq 2{,}83\cdot 32 + 900\cdot 0{,}9^{32} = 90{,}56 + 900\cdot 0{,}81^{16}\\ &< 90{,}56 + 900\cdot 0{,}7^8 < 90{,}56 + 900\cdot 0{,}5^4 = 90{,}56 + 900\cdot 0{,}0625\\ &= 90{,}56 + 56{,}25 = 146{,}81 < 180.\end{aligned}$$

Bemerkungen: Diese Abschätzung der oberen Schranke ist recht grob, eine Berechnung mit Taschenrechner macht für $s = 32$ die Abschätzung $\Sigma(M) \leq 121{,}464$ glaubhaft; für $s = 33$ sogar die schärfere Abschätzung $\Sigma(M) \leq 121{,}203$.

Numerische Berechnungen machen sogar $65{,}74331 < \sup(\Sigma(M)) < 65{,}74332$ glaubhaft.

Die Abschätzung (A) kann verschärft werden zu (man deute die Teilsumme der harmonischen Reihe als Untersumme bei der Berechnung von $\int \frac{1}{x}\,dx$)

$$\text{(A*)}\qquad \Sigma(R_n) < \ln(10) + 10^{-(n-1)} - 10^{-n},$$

also $\Sigma(R_1) < 2{,}83$; $\Sigma(R2) < 2{,}5$; $\Sigma(R_n) < 2{,}4$ für $n \geq 3$. Hiermit erhält man schärfere Abschätzungen für $\Sigma(M)$, die hier nicht ausgeführt werden. Zu bedenken ist hierbei, dass die oben verwendete Abschätzung von $\ln(10)$ nicht einfach einer Tabelle entnommen werden kann (vgl. Teilnahmebedingungen).

Zur Abschätzung (B) von $\Sigma(R_n)$ und deren Verwendung im Beweis gibt es folgende Varianten:

Variante 1 (mit Formel von Sylvester):

Es ist (B*) $\Sigma(R_n) < 90\cdot 0{,}9^n$ für $n \geq 7$:

A_x bezeichne die Menge der ganzen Zahlen aus R_n, in deren Dezimaldarstellung die Ziffer x nicht vorkommt; mit dieser Bezeichnung ist $R_n = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_8 \cup A_9$. (Aus praktischen Gründen wurde bei dieser Beschreibung auf die eigentlich nötige Aufnahme eines Index n verzichtet.)

Analog sei die Menge der ganzen Zahlen aus R_n, in deren Dezimaldarstellung weder die Ziffer x noch y noch ... noch z vorkommt, mit $A_{x,y,\ldots,z}$ bezeichnet $(x, y, \ldots, z \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $x < y < \ldots < z$.). Es ist dann $A_{x,y,\ldots,z} = A_x \cap A_y \cap \ldots \cap A_z$. (Man beachte, dass hier i.A. keine Zerlegung von $A_{x,y,\ldots,z}$ vorliegt!)

Nach der Formel von Sylvester ist (die Indices nehmen dabei Werte aus {0, 1, ..., 9} an, vor dem letzten Gleichheitszeichen wurde der letzte Summand weggelassen, da $A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_9 = \emptyset$):

$$|R_n| = |\bigcup_i A_i| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<m} |A_i \cap A_j \cap A_m| - \ldots + \sum_{\underbrace{i<j<\ldots<m}_{9}} |A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_m|$$

$$= \sum_{k=1}^{9}\left((-1)^{k+1}\sum_{\underbrace{x<y<\ldots<z}_{k}}\left|A_{x,y,\ldots,z}\right|\right) \qquad (*)$$

Zu einer gegebenen Auswahl von k Ziffern $x < y < \ldots < z$ bestimmen wir nun $|A_{x,y,\ldots,z}|$. Bei der Berechnung unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: $x \neq 0$, d.h. es gibt Zahlen in $A_{x,y,\ldots,z}$, in denen die 0 vorkommt. Dann stellen die n – tupel, deren Stellen mit einer der von $x, y, \ldots, z$ verschiedenen Ziffern besetzt sind und deren erste Stelle von 0 verschieden ist, in ein-eindeutiger Weise die Zahlen von $A_{x,y,\ldots,z}$ dar. Da es $(10-k)$ solche Ziffern gibt, ist nach bekannter kombinatorischer Formel $|A_{x,y,\ldots,z}| = (10-k)^n - 1\cdot(10-k)^{n-1} = (9-k)\cdot(10-k)^{n-1}$.

Es gibt $\binom{9}{k}$ solche Ziffernkombinationen aus k Ziffern $x < y <\ldots< z$ mit $x \neq 0$.

Fall 2: $x = 0$, d.h. die Ziffer 0 kommt in keiner der Zahlen von $\mathrm{A}_{x,\, y,\ldots,z}$ vor. Dann ist in jedem n – tupel, dessen Stellen mit einer der von $x, y, \ldots, z$ verschiedenen Ziffern besetzt ist, die erste Stelle von 0 verschieden; diese n – tupel stellen also in ein-eindeutiger Weise die Zahlen aus $\mathrm{A}_{x,\, y,\ldots,\, z}$ dar. Da es $(10 - k)$ solche Ziffern gibt, ist nach bekannter kombinatorischer Formel $|\mathrm{A}_{x,\, y,\ldots,\, z}| = (10 - k)^n$.

Es gibt $\binom{9}{k-1}$ solche Ziffernkombinationen aus k Ziffern $x < y <\ldots< z$ mit $x = 0$.

Hieraus erhalten wir

$$\sum_{\underbrace{x<y<\ldots<z}_{k}} \left|\mathrm{A}_{x,y,\ldots,z}\right| = \binom{9}{k}\left((10-k)^n-(10-k)^{n-1}\right)+\binom{9}{k-1}(10-k)^n$$

$$= \left(\binom{9}{k}+\binom{9}{k-1}\right)(10-k)^n-\binom{9}{k}(10-k)^{n-1}$$

$$= \binom{10}{k}(10-k)^n-\binom{9}{k}(10-k)^{n-1} =$$

$$\frac{10!(10-k)^n}{k!(10-k)!} - \frac{9!(10-k)^{n-1}}{k!(9-k)!}\cdot\frac{(10-k)}{(10-k)}$$

$$= \frac{10!(10-k)^n-9!(10-k)^n}{k!(10-k)!} = (10-k)^n\,\frac{10!-9!}{k!(10-k)!} =$$

$$(10-k)^n\,\frac{9\cdot 9!}{k!(10-k)(9-k)!}$$

$$= 9\cdot(10-k)^{n-1}\binom{9}{k}.$$

Diese Werte setzen wir nun in (*) ein und erhalten (weiter unten wird noch $\binom{9}{k}=\binom{9}{9-k}$ benützt):

$$|\mathrm{R}_n| = \sum_{k=1}^{9}(-1)^{k+1}\sum_{\underbrace{x,y,\ldots,z}_{k}}\left|\mathrm{A}_{x,y,\ldots,z}\right| = \sum_{k=1}^{9}(-1)^{(k+1)}\cdot 9\cdot(10-k)^{n-1}\binom{9}{k}$$

$$= 9\cdot\binom{9}{1}9^{n-1}-9\cdot\left(\left(36\cdot 8^{n-1}\left(1-\frac{7}{3}\left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}\right)\right)+\left(126\cdot 6^{n-1}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)\right)+\left(36\cdot 4^{n-1}\left(\frac{7}{3}-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)\right)+\left(9\cdot 2^{n-1}-1\right)\right)$$

$< 9^{n+1}$ für genügend große n, z.B. $n \geq 7$. (Nur der 1. Summand in der großen Klammer kann negativ werden; für $n \geq 7$ ist er positiv; damit ist der Inhalt der Klammer sicher positiv.)

Es gibt $9\cdot 10^{n-1}$ ganze Zahlen mit n Stellen; davon hat 10^{n-1} den größten Kehrwert. Man kann also abschätzen:

$$\Sigma(\mathrm{R}_n) \leq |\mathrm{R}_n|\frac{1}{\min(\mathrm{R}_n)} \leq \frac{9^{n+1}}{10^{n-1}} = 81\cdot 0{,}9^{n-1} = 90\cdot 0{,}9^n \text{ für alle } n \geq 7.$$

Dies verwenden wir in einer zum 1. Beweis analogen Schlussweise und erhalten für $s = 32 \geq 6$:

$$\Sigma(\mathrm{M}) \leq 2{,}83\cdot s + \sum_{i=s+1}^{\infty} 90\cdot 0{,}9^i \leq 2{,}83\cdot s + 90\cdot 10\cdot 0{,}9^{s+1} = 2{,}83\cdot s + 810\cdot 0{,}9^s$$

$$< 2{,}83\cdot 32 + 810\cdot 0{,}0625 = 90{,}56 + 50{,}625$$

$$= 141{,}185 < 180.$$

Bemerkung: Mit Hilfe eines Rechners wird für $s = 32$ die Abschätzung $\Sigma(\mathrm{M}) \leq 118.373$ glaubhaft.

Variante 2:

Es ist (B**) $\Sigma(R_n) < 28{,}3 \cdot 0{,}9^n$:

Wir untersuchen die positiven ganzen Zahlen mit n Stellen und Anfangsziffer z: Jeder der ziffernreduzierten Zahlen in dieser Menge fehlt eine Ziffer $z^* \in \{0,1,2,...,9\} \setminus \{z\}$; zu jeder Ziffer z* gibt es jeweils 9^{n-1} solche Zahlen. Insgesamt gibt es also unter den n–stelligen Zahlen mit Anfangsziffer z nicht mehr als $9 \cdot 9^{n-1} = 9^n$ ziffernreduzierte Zahlen. In der Summe der Kehrwerte dieser Zahlen ersetzen wir jeden Summanden durch den größten, also durch $\frac{1}{z \cdot 10^{n-1}}$; der Wert der Summe dieser Kehrwerte ist also höchstens $9^n \cdot \frac{1}{z \cdot 10^{n-1}}$ $= \frac{1}{z} \cdot 9 \cdot 0{,}9^{n-1} = \frac{1}{z} \cdot 10 \cdot 0{,}9^n$. Damit ist

$$\Sigma(R_n) \le 10 \cdot 0{,}9^n \sum_{z=1}^{9} \frac{1}{z} \le 10 \cdot 0{,}9^n \cdot 2{,}83 = 28{,}3 \cdot 0{,}9^n.$$

Dies verwenden wir in einer zum 1. Beweis analogen Schlussweise und erhalten so für $s = 20$

$$\begin{aligned}\Sigma(M) &\le 2{,}83 \cdot s + \sum_{i=s+1}^{\infty} 28{,}3 \cdot 0{,}9^i \le 2{,}83 \cdot s + 28{,}3 \cdot 10 \cdot 0{,}9^{s+1} = 2{,}83 \cdot (s + 100 \cdot 0{,}9^{s+1})\\ &\le 2{,}83 \cdot (20 + 100 \cdot 0{,}9^{21}) = 2{,}83 \cdot (20 + 100 \cdot 0{,}729^7) < 2{,}83 \cdot (20 + 100 \cdot (\tfrac{3}{4})^7)\\ &= 2{,}83 \cdot (20 + 100 \cdot \frac{2187}{16384}) \le 2{,}83 \cdot (20 + 100 \cdot \frac{2400}{16000}) \le 2{,}83 \cdot (20 + 15)\\ &= 99{,}05 < 180.\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Verwendung eines Rechners macht für $s = 20$ die Abschätzung $\Sigma(M) \le 87{,}566$ glaubhaft; für $s = 21$ sogar schärfer $\Sigma(M) \le 87{,}300$.)

2. Beweis: Wir bezeichnen mit $A(z)$ die Menge aller positiven ganzen Zahlen, in denen die Ziffer z nicht vorkommt, mit $A(z,n)$ die Menge der Zahlen aus $A(z)$ mit n Stellen.

Jede Zahl $m \in A(z, n+1)$ entsteht aus einer Zahl $m^* \in A(z,n)$ durch Anhängen einer Ziffer, die von z verschieden ist; d.h. es ist $m = 10 \cdot m^* + y$ mit $y \in \{0, 1, ...,9\}$, $y \ne z$. Dann ist

$$\begin{aligned}\Sigma(A(z,n+1)) &= \sum_{a \in A(z,n+1)} \frac{1}{a} = \sum_{a^* \in A(z,n)} \sum_{\substack{y=0\\ y \ne z}}^{9} \frac{1}{10a^* + y}\\ &\le \sum_{a^* \in A(z,n)} \sum_{\substack{y=0\\ y \ne z}}^{9} \frac{1}{10a^*} = \sum_{a^* \in A(z,n)} \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{a^*} = 0{,}9 \cdot \Sigma(A(z,n)).\end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion und mit der Formel für die geometrische Reihe (es ist $\sum_{i=0}^{\infty} 0{,}9^i = \frac{1}{1-0{,}9} = 10$) erhält man

$$\begin{aligned}\Sigma(A(z)) &= \Sigma(A(z,1)) + \Sigma(A(z,2)) + \Sigma(A(z,3)) + ...\\ &\le \Sigma(A(z,1)) \cdot [1 + 0{,}9 + 0{,}9^2 + ...] = 10 \cdot \Sigma(A(z,1)).\end{aligned}$$

Einfaches Nachrechnen zeigt, dass

$$S := \Sigma(A(0,1)) = \sum_{i=1}^{9} \frac{1}{i} = \frac{2520+1260+840+630+504+420+360+315+280}{2520} = \frac{7129}{2520}.$$

Weiter folgt aus den Definitionen unmittelbar $\Sigma(A(z,1)) = S - \frac{1}{z}$ ($z \in \{1, 2, ..., 9\}$.

Nun schätzen wir $\Sigma(M)$ ab: Da $M \subset A(0) \cup A(1) \cup \ldots \cup A(10)$, ist in einer ersten Ungleichung

$$\Sigma(M) \quad \le \quad \Sigma(A(0)) + \Sigma(A(1)) + \Sigma(A(2)) + \ldots + \Sigma(A(9)).$$

Hierin sind die Kehrwerte der einstelligen Zahlen, also $\Sigma(Z_1)$, 9 Mal gezählt, also 8 Mal zuviel; die Kehrwerte der zweistelligen Zahlen, also $\Sigma(Z_2)$, sind mindestens 8 Mal gezählt, also 7 Mal zu viel, ..., die 8stelligen Zahlen sind mindestens zwei Mal gezählt, also 1 Mal zuviel. Wir können also etwas schärfer abschätzen :

$$\Sigma(M) \quad \le \quad \sum_{z=0}^{9}\Sigma(A(z)) \; - \; \sum_{i=1}^{8}(9-i)\Sigma(Z_i)$$

In diesem Ausdruck ist $Z_1 = \Sigma(A(0,1)) = S$; ferner für $i \ge 2$

$$\begin{aligned}
\Sigma(Z_i) \quad &= \quad \frac{1}{10^{i-1}} + \frac{1}{10^{i-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2\cdot 10^{i-1}} + \frac{1}{2\cdot 10^{i-1}+1} + \ldots + \frac{1}{3\cdot 10^{i-1}} + .. + \ldots + \frac{1}{10\cdot 10^{i-1}} - \frac{1}{10\cdot 10^{i-1}} \\
&> \quad \frac{1}{10^{i-1}} \quad -\frac{1}{1}+\frac{1}{1} \quad + \frac{10^{i-1}}{2\cdot 10^{i-1}} + \frac{10^{i-1}}{3\cdot 10^{i-1}} + \ldots + \frac{10^{i-1}}{10\cdot 10^{i-1}} - \frac{1}{10\cdot 10^{i-1}} \\
&> \quad S - 1 - \frac{1}{10^{i}}.
\end{aligned}$$

Der Rest ist Rechenarbeit:

$$\begin{aligned}
\Sigma(M) \quad &\le \quad \sum_{z=0}^{9}\Sigma(A(z)) \; - \; \sum_{i=1}^{8}(9-i)\Sigma(Z_i) \\
&< \quad 10 \cdot [\, S + (S - \tfrac{1}{2}) + (S - \tfrac{1}{3}) + \ldots + (S - \tfrac{1}{9})] \\
&\qquad\qquad - \; 8\cdot S \; - \; 7\cdot(S - 1 - \frac{1}{10^1}) - \; 6\cdot(S - 1 - \frac{1}{10^2}) \; - \ldots - \; 1\cdot(S - 1 - \frac{1}{10^7}) \\
&= \quad 90\cdot S \; - \; 10(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{9}) \; - \; (8+7+..+1)\cdot S \; + \; (7+6+..+1) \; + \; \sum_{i=1}^{7}(8-i)\cdot 10^{-i} \\
&= \quad 90\cdot S \; - 10\cdot(S-1) \; - \; 36\cdot S \; + \; 28 \; + \; 0{,}7654321 \\
&= \quad 44\cdot S \; + \; 38 \; + \; 0{,}7654321 \; = \; \frac{44\cdot 7129}{2520} \; + \; 38{,}7654321 \\
&= \quad \frac{11*7129}{630} \; + \; 38{,}7654321 \\
&< \quad \frac{78419}{630} \; + \; 38{,}7654321 \; < \; \frac{84000}{600} + 38{,}7654321 \; = \; 178{,}7654321 \; < \; 180.
\end{aligned}$$

Bemerkungen: Diese Aufgabe ist eng verbunden mit den zehn *Kempner-Reihen*, diese entstehen aus der harmonischen Reihe durch Entfernen aller Summanden, deren Kehrwert eine bestimmte Ziffer z nicht enthalten. Im 2. Beweis sind sie mit $\Sigma(A(z))$ bezeichnet, dort ist auch deren Konvergenz gezeigt. (Quelle: viele Lexika, z.B. http://mathworld.wolfram.com/KempnerSeries.html); oder Baillie, R. "Sums of Reciprocals of Integers missing a Given digit." Amer.Math.Monthly **86**, 372-374, 1979.)