

## Die Aufgaben der 1. Runde 2018

### Aufgabe 1

Welches ist die größte natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass jede ihrer Ziffern außer der ersten und der letzten kleiner ist als das arithmetische Mittel ihrer beiden Nachbarziffern?



### Aufgabe 2

Bestimme alle reellen Zahlen  $x$ , für die  $\left\lfloor \frac{20}{x+18} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+18}{20} \right\rfloor = 1$  gilt.

Erläuterung: Für eine reelle Zahl  $z$  bezeichnet  $\lfloor z \rfloor$  die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich  $z$  ist.



### Aufgabe 3

Im spitzwinkligen Dreieck  $ABC$  wird der Höhenschnittpunkt mit  $H$  bezeichnet. Die Höhe von  $A$  schneide die Seite  $BC$  im Punkt  $H_a$  und die Parallele zu  $BC$  durch  $H$  schneide den Kreis mit Durchmesser  $AH_a$  in den Punkten  $P_a$  und  $Q_a$ . Entsprechend seien die Punkte  $P_b$  und  $Q_b$  sowie  $P_c$  und  $Q_c$  festgelegt.

Beweise, dass die sechs Punkte  $P_a, Q_a, P_b, Q_b, P_c$  und  $Q_c$  auf einem gemeinsamen Kreis liegen.



### Aufgabe 4

Im Raum sind sechs Punkte gegeben, die paarweise verschiedene Entfernungen voneinander haben und von denen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Wir betrachten alle Dreiecke mit Ecken in diesen Punkten.

Beweise, dass es unter diesen Dreiecken eines gibt, dessen längste Seite zugleich kürzeste Seite in einem anderen dieser Dreiecke ist.

