BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2020

Vorläufige Fassung

für die
Homepage

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: 29. Februar 2020

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

STIFTERVERBAND

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Aufgabe 1: Beweise:

Es gibt unendlich viele Quadratzahlen der Form $50^m - 50^n$, aber keine Quadratzahl der Form $2020^m + 2020^n$; dabei sind m und n positive ganze Zahlen.

1. Beweis: Für $n = 2k$ und $m = 2k + 1$ gilt

$$50^m - 50^n = 50^{2k+1} - 50^{2k} = 50^{2k} \cdot (50 - 1) = (50^k)^2 \cdot 49 = (50^k \cdot 7)^2,$$

dies ist tatsächlich eine Quadratzahl; und da m, n und der Term $(50^k \cdot 7)^2$ mit k streng monoton wachsen, sind diese auch alle verschieden.

Es ist $2020 \equiv 1 \mod 3$, also hat jede Zahl der Form $2020^m + 2020^n$ den Dreierrest $1^m + 1^n = 2$, kann also keine Quadratzahl sein, denn jede Quadratzahl hat den Dreierrest 1 oder 0.

2. Beweis (für Teil 2): Über die Aufgabenstellung hinaus zeigen wir :

HS: Sei $b = r \cdot p$ mit $r \geq 2$, p prim, $p \geq r + 3$. Dann ist $b^m + b^n \neq q^2$ für alle m,n,q (r,m,n,q positiv ganz).

Dies gilt dann (weil 101 prim ist) insbesondere für die Zahl $b = 2020 = 20 \cdot 101$.

Beweis (durch Widerspruch): Sei $b^m + b^n = q^2$ für ein positives ganzzahliges q. Dann kann nicht $m = n$ sein. Denn $b^m + b^m = 2\, r^m p^m$ führt zu einem Widerspruch: Da p prim und $p \geq r + 3$ ist, sind r und p teilerfremd und auch 2 und p, also muss m gerade sein. Dann kommt der Faktor 2 ungeradzahlig oft vor, was aber bei einer Quadratzahl nie der Fall ist.

Also ist $m \neq n$, o.B.d.A. $m > n$, dann ist $b^m + b^n = b^n(b^d + 1) = r^n p^n (r^d p^d + 1)$ mit $d := m - n \geq 1$. Weil $p \geq r + 3$, gilt $p \nmid r$, also ist n gerade, also ist $r^n p^n$ Quadratzahl und somit auch $r^d p^d + 1$, also gibt es eine positive ganze Zahl z mit $r^d p^d + 1 = z^2$.

Zwei positive Quadratzahlen unterscheiden sich um mindestens 3, also ist $r^d p^d$ keine Quadratzahl, also d ungerade, also $d \geq 1$. Ferner ist $r^d p^d = z^2 - 1 = (z + 1)(z - 1)$ das Produkt zweier Zahlen, die sich um 2 unterscheiden. Weil $p \geq r + 3$, ist auch $p^d \geq (r + 3)^d > r^d + 3$. Also ist $p^d \neq z + 1$ und $r^d \neq (z + 1)$, also $r' \cdot p^x = z + 1$ und $r'' \cdot p^y = z - 1$ mit $x,y < d$ und $x + y = d$. Hieraus folgt $p \mid (z + 1)$, $p \mid (z - 1)$, also $p \mid (z+1) - (z-1) = 2$, was im Widerspruch zu $p \geq r + 3$ steht.

Bemerkung: Man kann für Teil 1 schärfer argumentieren:

In der Faktorisierung $50^m - 50^n = 50^n(50^{m-n} - 1)$ ist der zweite Faktor ungerade, der erste gerade. Alle Faktoren 2 in der Primfaktorzerlegung von $50^n(50^{m-n} - 1)$ sind also in 50^n enthalten. Ist also der Ausdruck eine Quadratzahl, so muss n gerade und damit auch 50^n eine Quadratzahl sein. Hieraus folgt wiederum, dass auch $(50^{m-n} - 1)$ Quadratzahl ist. Für alle $m - n > 1$ ist aber $(50^{m-n} - 1) \equiv -1 \mod 4$, jede Quadratzahl hat aber Viererrest 1 oder 0. Also sind $(m,n) = (2k+1; 2k)$ die einzigen Zahlenpaare, für die $50^m - 50^n$ eine Quadratzahl ist.

Die Menge aller b zu bestimmen, für die die diophantischen Gleichung $b^m + b^n = q^2$ Lösungen besitzt, ist eine eigene Fragestellung.

Aufgabe 2: Konstantin zieht auf einem n x n – Schachbrett ($n \geq 3$) mit einem Springer mit möglichst wenigen Zügen vom Feld in der unteren linken Ecke auf das Feld in der unteren rechten Ecke. Danach nimmt Isabelle diesen Springer und zieht von dem Feld in der unteren linken Ecke mit möglichst wenigen Zügen auf das Feld in der oberen rechten Ecke.

Für welche n benötigen beide dafür gleich viele Züge?

Hinweise: Der Springer darf nur wie im Schachspiel üblich gezogen werden. Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu begründen.

Antwort: Der einzige Wert von n, für den beide gleich viele Züge benötigen, ist $n = 7$.

Bezeichnungen: Mit $K(n)$ und $I(n)$ sei die minimale Anzahl von Zügen bezeichnet, die Konstantin bzw. Isabelle benötigen, um ihre Zielfelder zu erreichen.

Jedem Feld des Schachbrettes ordnen wir nicht–negative ganzzahlige Koordinaten zu: Das a–te Feld von links in der b–ten Zeile von unten erhalte die Koordinaten $(a - 1;b - 1)$. Das Feld in der linken unteren Ecke ist also (0;0), das in der rechten unteren Ecke $(n - 1,0)$, das in der rechten oberen Ecke $(n - 1;n - 1)$.

Ähnlich wie bei der Beschreibung von Geometrie durch Vektoren bezeichne $(x;y)$ je nach Kontext das Feld $(x;y)$ oder den Zug um x Felder nach rechts und y Felder nach oben. Der Springer zieht stets (±2;±1) oder (±1;±2).

1. Beweis: Das Feld in der linken unteren Ecke bezeichnen wir mit lu, das in der rechten unteren Ecke mit ru und das in der rechten oberen Ecke mit ro.

2	1	4
3		1
0	3	2

	3		3	4		4
3		3		3	4	
2	3	2	3	4	3	4
3	2	3	2	3		3
2	1		3	2	3	
3		1	2	3		3
0	3	2	3	2	3	4

Auf einem 7x7– und einem 3x3–Schachbrett beschriften wir das Feld links unten mit 0, danach alle Felder, die wir von hier mit einem Springerzug erreichen können, mit "1", dann alle Felder, die von einem solchen Feld mit einem weiteren Zug erreicht werden können und noch nicht beschriftet sind, mit "2" usw. bis wir ru und ro erreicht haben (vgl. Bild). Damit haben wir schnell bestätigt, dass $K(7) = I(7) = 4$ und $2 = K(3) \neq I(3) = 4$. Es genügt also noch zu zeigen, dass aus $K(n) = I(n)$, $n > 3$ stets $n = 7$ folgt.

Zunächst zeigen wir, dass n ungerade sein muss: Das vom Springer besetzte Feld wechselt mit jedem Zug die Farbe, d.h. eine Zugfolge besteht genau dann aus einer geraden Anzahl von Zügen, wenn Anfangs– und Endfeld gleiche Farbe haben. Dies trifft für die Felder lu und ro stets zu, d.h. $I(n)$ ist stets gerade. Also muss auch $K(n)$ gerade sein und damit auch die Felder lu und ru gleiche Farbe haben. Dies ist genau dann der Fall, wenn n ungerade ist. Wir können deswegen n in der Form $n = 4r + j$ mit $j \in \{1,3\}$, $r \geq 1$ schreiben, nach Vorgabe von n sind dabei r und j eindeutig bestimmt.

Konstantin muss ebenso wie Isabelle von einem Feld auf dem linken Rand ein gleichfarbiges Feld auf dem rechts gegenüber liegenden Rand erreichen, Isabelle zusätzlich von einem Feld am unteren Rand ein gleichfarbiges am oben gegenüberliegenden Rand. (Dies ist eine schwächere Forderung als in der Aufgabenstellung vorgegeben).

Deshalb überlegen wir, welche Mindestzahl und welche Art von Zügen man benötigt, dies zu erreichen. Da man dabei mindestens $n - 1$ mal um ein Feld nach rechts (bzw. nach oben) voran kommen muss, und man mit jedem Zug höchstens zwei solche Schritte machen kann, benötigt man sicher mindestens $^1/_2(4r + j - 1) = 2r + {}^{(j-1)}/_2$ Züge.

Falls $j = 1$, sind dies mindestens $2r$ Züge, und $2r$ Züge sind auch ausreichend, nämlich $2r$ Züge (2, ± 1) (bzw. (±1,2); bis auf Reihenfolge sind diese Zugfolgen die einzigen möglichen. Konstantin kann durch Abwechseln der Züge (2, + 1) und (2, – 1) auch tatsächlich das Feld ru erreichen. Isabelle kann aber das Feld ro so nicht erreichen: Das Feld ro liegt sowohl auf dem rechts gegenüber liegenden Rand als auch auf dem oben gegenüberliegenden. Also muss Isabelle mit $2r$ Zügen (2, ± 1) zum gleichen Feld kommen wie mit $2r$ Zügen (± 1,2), d.h. Isabelle muss, weil das Schachbrett quadratisch ist, um gleich viele Felder nach rechts wie nach oben vorankommen. Dies ist nicht möglich, da man mit dieser Zugfolge $2r$ Felder nach rechts (bzw. oben), aber um höchstens r Felder nach oben (bzw. rechts) kommt. (Der Fall $r = 0$ ist ja ausgeschlossen).

Falls $j = 3$, sind dies mindestens $2r + 2$ Züge, und $2r + 2$ Züge sind auch ausreichend, nämlich 2 Züge (1;± 2) gefolgt von $2r$ Zügen (2;±1) (bzw. (± 2;1) gefolgt von $2r$ Zügen (±1;2); bis auf Reihenfolge sind diese Zugfolgen auch die einzig möglichen. Konstantin kann mit den Anfangszügen (1;+2), (1;–2) und anschließendem Abwechseln der Züge (2;+1) und (2,–1) auch tatsächlich das Feld ru erreichen. Um den rechten Rand zu erreichen, benötigt Isabelle mindestens zwei Züge (1;±2) und $2r$ Züge (2;±1), und zwei Züge (±2,1) und $2r$ Züge (±1,2) für den oberen Rand. Mit der einen Zugfolge kommt sie um $2{\cdot}2r$ Felder nach rechts und höchstens um $2r + 2$ Felder nach oben, mit der anderen $2{\cdot}2r$ Felder nach rechts und $2r + 2$ Felder nach oben. Da sie auf dem quadratischen Schachbrett um gleich viele Felder nach rechts wie nach oben kommen muss, ist also $2r + 2 = 2{\cdot}2r$, es folgt $r = 1$ und hieraus $n = 4 \cdot 1 + 3 = 7$.

2. Beweis: (Abschätzung von $I(n)$ nach unten und von $K(n)$ nach oben): Wir ordnen jedem Feld $(x;y)$ die Zahl $E(x;y) := x + y$ zu; das Feld links unten hat so den E–Wert 0, das Feld rechts unten $n - 1$, das Feld rechts oben $2(n - 1)$. Da jeder Zug eines Springers von der Form (±1;±2) oder (±2;±1) ist, verändert sich der Wert E des vom Springer besetzten Feldes um ±3 oder ±1, weitere Möglichkeiten gibt es nicht. Insbesondere nimmt der E–Wert des vom Springer besetzten Feldes mit jedem Zug um höchstens 3 zu.

<u>Es gilt $I(n) \geq {}^2/_3 \cdot (n - 1)$</u>: Isabelle zieht von (0;0) nach $(n - 1;n - 1)$, dabei nimmt der E–Wert des vom Springer besetzten Feldes um $2(n - 1)$ zu, also ist $I(n) \geq {}^2/_3\,(n - 1)$.

<u>Es ist $n - 1$ gerade</u>: Der E–Wert des vom Springer besetzten Feldes nimmt mit den Zügen abwechselnd gerade und ungerade Werte an. Jede Zugfolge zwischen zwei Feldern besteht genau dann aus einer geraden Anzahl von Zügen, wenn diese beiden Felder E–Werte gleicher Parität haben. Da $E(0;0) = 0$ und $E(n - 1;n - 1) = 2(n - 1)$ beide gerade sind, besteht jede Zugfolge von Isabelle aus einer geraden Anzahl von Zügen. Es kann also $K(n) = I(n)$ kann nur dann gelten, wenn die Zugfolge von links unten nach rechts unten auch aus einer geraden Anzahl von Zügen besteht, d.h. wenn $E(n - 1;0) = n - 1$ gerade ist.

<u>Es gilt $K(n) \leq {}^1/_2(n + 1)$</u>: Wenn $n - 1 \equiv 2 \bmod 4$ ist, kann Konstantin mit den beiden Züge (1;2) und (1;–2) gefolgt von ${}^1/_2(n - 3)$ Züge abwechselnd (2;1) und (2;–1) das Feld rechts unten erreichen, dies sind insgesamt $2 + {}^1/_2(n - 3) = {}^1/_2(n + 1)$ Züge. Wenn $n - 1 \equiv 0 \bmod 4$, genügen sogar ${}^1/_2(n - 1)$ Züge, nämlich ${}^1/_2(n - 1)$ Züge abwechselnd (2;1) und (2;–1). Es sei noch bemerkt, dass wegen $n \geq 3$ stets ${}^1/_2(n - 3) \geq 0$ ist, d.h die angegebene Zugfolgen sind stets wohldefiniert, und da sie nicht über die dritte Zeile führen, können sie auch auf jedem Schachbrett mit $n \geq 3$ ausgeführt werden.

Gilt also ${}^2/_3(n - 1) > {}^1/_2(n + 1)$, was äquivalent ist zu $n > 7$, so ist $I(n) > K(n)$, also $I(n) \neq K(n)$. Damit genügt es, die Fälle $n = 3, 5, 7$ zu untersuchen:

$n = 3$: Wir markieren alle Felder, die von (0;0) direkt erreicht werden können, mit "1", diejenigen Felder, die von hier direkt erreicht werden können und noch nicht anderweitig markiert sind, mit "2". Dann kann man ablesen: $K(3) = 2$, das Feld (2;2) ist nicht mit 1 oder 2 beschriftet, also ist $I(3) > 2$.

2	1	
		1
0		2

$n = 5$: Es gilt $K(5) \leq {}^1/_2(5 + 1) = 3$ und $I(5) \geq {}^2/_3(5 - 1) = 2^2/_3$. Da zusätzlich die Zugzahl gerade sein muss, gilt sogar $I(5) \geq 4$ und $K(5) \leq 2$. (Eine entsprechende Markierung der Felder eines 5x5–Schachbrettes wie beim 3x3–Schachbrett führt zum gleichen Ergebnis.)

$n = 7$: Wir markieren die Felder des 7x7–Schachbretts analog wie im Fall $n = 3$. Die Abschätzungen $I(7) \geq {}^2/_3(n - 1) = {}^2/_3(4 - 1) = 4$ und $K(7) \leq {}^1/_2(n + 1) = {}^1/_2(7 + 1) = 4$ sind also scharf, es gilt also $I(7) = K(7)$.

	3		3	3		4
3		3		3	3	
2	3	2	3		3	3
3	2	3	2	3		3
2	1		3	2	3	
3		1	2	3		3
0	3	2	3	2	3	4

3. Beweis (über konkreter Berechnung der jeweils minimalen Zugzahl für alle n): Wir schreiben $n = 3k + i$ mit $i \in \{-1, 0, 1\}$ und $n = 4r + j$ mit $j \in \{0, 1, 2, 3\}$; nach Vorgabe von n sind k, i, r, j eindeutig bestimmt. Wir werden unten zeigen, dass mit diesen Bezeichnungen gilt:

$I(3) = 4$,	für $n > 3$:	$I(n)$	$= I(3k + i)$	$= 2k$;
	für $j \in \{1, 3\}$:	$K(n)$	$= K(4r + j)$	$= 2r + j - 1$,
$K(4) = 5$,	für $n > 4, j \in \{0, 2\}$:	$K(n)$	$= K(4r + j)$	$= 2r + 1$,

(Bemerkung: Auf dem 4x4–Schachbrett kann man das Feld (3;0) mit drei Zügen erreichen und das Feld (1;1) mit zwei Zügen, wenn man Felder außerhalb des Brettes benutzen darf.)

Dann können wir schließen:

Für $n = 3$ ist $I(3) = 4 \neq 2 = K(3) = 2$.

Für $j \in \{0, 2\}$ gilt: $K(n)$ ist stets ungerade, $I(n)$ stets gerade, sodass $I(n) \neq K(n)$.

Für $n > 3$, $j \in \{1, 3\}$ gilt: $K(n) = I(n) \Leftrightarrow$ $3k + i = 4r + j$ (I) und $2k = 2r + j - 1$. (II)

Auflösen dieses Gleichungssystems (2 · (II) – (I) und Umordnen) ergibt $k = i + j - 2$. Da $n > 3$, ist $k \geq 1$, also $i + j \geq 3$, gleichzeitig ist $i + j \leq 4$. Es ist also $k = 1$ oder $k = 2$. Falls $k = 1$, erhalten wir den ausgeschlossenen Wert $n = 3 \cdot 1 - 0 = 3$. Falls $k = 2$, ist $n = 3 \cdot 2 + 1 = 7$. Probe (sie vermeidet eine Untersuchung, ob sie wirklich notwendig ist), dass tatsächlich $I(7) = 4 = K(7)$.

Es fehlt noch der Nachweis für die Richtigkeit der Funktionsterme $I(n)$ und $K(n)$. Hierfür verwenden wir die Bezeichnungen und Zwischenergebnisse aus dem 2. Beweis:

Dass $I(3) = 4$ und $K(4) = 5$, bestätigt man durch Betrachten der endlich vielen möglichen Zugfolgen auf dem 3x3– bzw. 4x4–Schachbrett. Für andere Werte $n \geq 3$ gilt (man überzeugt sich leicht, dass diese alle nur über innere Felder des begrenzten Schachbrettes gehen):

Es gilt $I(n) \geq {}^1/_3 \cdot 2 \cdot (n - 1) = {}^1/_3 \cdot 2 \cdot (3k + i - 1) = 2k + {}^{(i-1)}/_3 \geq 2k - {}^2/_3$; und da $I(n)$ ganzzahlig ist, gilt sogar $I(n) \geq 2k$. Andererseits gilt auch $I(n) \leq 2k$, dies zeigen wir durch Angabe einer konkreter Zugfolgen mit $2k$ Zügen:

Falls $n = 3k + 1$, genügen k Doppelzüge [(2;1)(1;2)] = $(3k ; 3k) = (n - 1;n - 1)$.

Falls $n = 3k + 0$ genügen 4 Züge [(2;1)(–1;2)(2;1)(2;1)]= (5;5) gefolgt von $(k - 2)$ Doppelzügen [(2;1)(1;2)]; dies führt zum Feld $(5 + 3(k - 2); 5 + 3(k - 2) = (3k - 1;3k - 1) = (n - 1;n - 1)$; wobei noch bemerkt sei, dass $(k - 2) \geq 0$, weil $n > 3$.

Falls $n = 3k - 1$ genügen 4 Züge [(2;1)(–1;2)(2;–1)(1;2)] gefolgt von $(k - 2)$ Doppelzügen [(2;1)(1;2)]; dies führt zum Feld $(4 + 3(k - 2); 4 + 3(k - 2) = (3k - 2;3k - 2) = (n - 1;n - 1)$; wieder ist $(k - 2) \geq 0$.

Da mit jedem Zug die erste Koordinate um höchstens zwei zunimmt und Konstantin auf seinem Weg diese Koordinate um $n - 1$ vergrößern muss, ist $K(n) \geq {}^1/_2 \cdot (n - 1) = {}^1/_2 \cdot (4r + j - 1) = 2r + {}^{(j-1)}/_2$; und da $K(n)$ ganzzahlig ist, gilt sogar $K(n) \geq 2r$ und für $j \in \{2,3\}$ sogar $K(n) \geq 2r + 1$.

Falls $j \in \{0,2\}$ ist n gerade, also $K(n)$ ungerade, sodass in diesem Fall stets $K(n) \geq 2r + 1$. Es ist aber auch $K(n) \leq 2r + 1$, denn Konstantin kann in $2r + 1$ Zügen stets das Feld $(n - 1;0)$ erreichen:

Für $j = 0$, d.h. für $n = 4r + 0$, genügen $2r + 1 = 3 + 2(r - 1)$ Züge: nämlich die 3 Züge [(2;1)(2;1)(–1;–2)] gefolgt von $(r - 1)$ Doppelzügen [(2;1)(2;–1)], was tatsächlich zum Feld $(3 + 4(r - 1);0) = (4r - 1; 0) = (n - 1;0)$ führt.

Für $j = 0$, also für $n = 4r + 2$, ersetzen wir in obiger Betrachtung den dritten Zug (–1;–2) durch (1;–2), dann führt die Folge dieser $2r + 1$ Zügen zum Feld $(4r + 1; 0) = (n - 1;0)$.

Falls $j \in \{1,3\}$ ist n ungerade, also $K(n)$ gerade, also mindestens so groß wie die kleinste gerade Zahl, die größer oder gleich $2r + {}^{(j-1)}/_2$ ist, d.h. es ist stets $K(n) \geq 2r + j - 1$. Es ist aber auch $K(n) \leq 2r + j - 1$:

Für $j = 1$, d.h. für $n = 4r + 1$, genügen $2r + 1 - 1 = 2r$ Züge, nämlich
r Doppelzüge [(2;1)(2;–1)], diese führen zum Feld $(4r;0) = (n - 1;0)$.

Für $j = 3$, also für $n = 4r + 2$, genügen $2r + 3 - 1 = 2r + 2$ Züge,
nämlich zwei Züge [(1;2),(1;–2)] gefolgt von r Doppelzügen [(2;1)(2;–1)], diese führen zum Feld $(4r + 2;0) = (n - 1;0)$.

Bemerkungen: Färbt man Felder mit ungeradem E weiß, die mit geradem E schwarz, so erhält man die übliche Schachbrettfärbung.

Die Aufgabenstellung geht von eine begrenzten Schachbrett aus. Dies muss bei der Argumentation berücksichtigt werden. Es kommt vor, dass die minimale Zugzahl zum Erreichen eines Eckfeldes kleiner ist, wenn man auch Felder "außerhalb" des begrenzten Schachbretts betreten darf. Auf dem 4x4-Schachbrett kann man das Feld rechts unten dann mit drei anstatt mit fünf Zügen erreichen, auf dem 3x3–Schachbrett kann das mittlere Feld ohne diese Grenzüberschreitung überhaupt nicht erreichen.

Aufgabe 3: Die Strecke AB sei der Durchmesser eines Kreises k und E ein Punkt im Innern von k. Die Gerade AE schneide k außer in A noch im Punkt C, die Gerade BE schneide k außer in B noch im Punkt D.

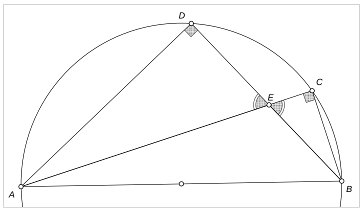
Beweise: Der Wert von $\overline{AC}\cdot\overline{AE} + \overline{BD}\cdot\overline{BE}$ ist unabhängig von der Lage von E.

Vorbemerkung: Wenn E auf der Strecke AB liegt, dann ist $C = B$ und $D = A$ und die Aussage richtig, weil $\overline{AC}\cdot\overline{AE} + \overline{BD}\cdot\overline{BE} = \overline{AB}\cdot\overline{AE} + \overline{BA}\cdot\overline{BE} = \overline{AB}\cdot(\overline{AE} + \overline{BE}) = \overline{AB}^2$ unabhängig von der Lage von E ist. In einigen der folgenden Beweise müsste dieser Fall gesondert betrachtet werden.

Es gilt sogar schärfer, dass $\overline{AC}\cdot\overline{AE} + \overline{BD}\cdot\overline{BE} = \overline{AB}^2$, und weiter gilt die Ausage auch für jede Lage des Punktes E in der Zeichenebene. Dabei müssen allerdings im Fall $\alpha > 90°$ oder $\beta > 90°$ Längen als Längen gerichteter Strecken verstanden werden. Wenn nämlich z.B. $\beta > 90°$ ist, dann liegt B zwischen D und E und genau einer der beiden Werte $\overline{BD}$ und $\overline{BE}$ ist dann negativ, entsprechendes gilt für $\alpha \geq 90°$. Die Aussage verändert sich in diesen beiden Fällen zu $|\overline{AC}\cdot\overline{AE} - \overline{BD}\cdot\overline{BE}| = \overline{AB}^2$. Im Fall $\alpha = 90°$ oder $\beta = 90°$ kann ein Punkt C bzw. D beliebig auf dem Kreis gewählt werden.

Falls E auf der Kreislinie liegt, ist $E = C = D$ und wir erhalten den Satz des Pythagoras.

1. Beweis (Satz von Thales, ähnliche Dreiecke): Die Dreiecke BEC und AED besitzen beide einen rechten Winkel bei C bzw. D (Satz des Thales) sowie den gleichen Winkel bei E (Scheitelwinkel), sind also ähnlich und somit gilt $\overline{AE}\cdot\overline{EC} = \overline{BE}\cdot\overline{ED}$ (ersatzweise auch begründbar mit Sehnensatz). Weil E im Innern des Kreises mit Durchmesser AB liegt, liegt E im Innern der Strecken AC und BD, es gilt $\overline{AE} + \overline{EC} = \overline{AC}$ und $\overline{BE} + \overline{ED} = \overline{BD}$):



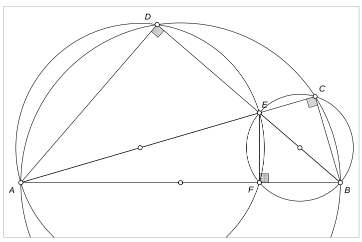
Zusammen mit dem Satz von Pythagoras in den rechtwinkligen Dreiecken ECB und ACB ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\overline{AC}\cdot\overline{AE} + \overline{BD}\cdot\overline{BE} &= (\overline{AE}+\overline{EC})\cdot(\overline{AC}-\overline{EC}) + (\overline{BE}+\overline{ED})\cdot\overline{BE} \\
&= \overline{AE}\cdot\overline{AC} - \overline{AE}\cdot\overline{EC} + \overline{EC}\cdot\overline{AC} - \overline{EC}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{ED}\cdot\overline{BE} \\
&= (\overline{AE}\cdot\overline{AC} + \overline{EC}\cdot\overline{AC}) + (\overline{BE}^2 - \overline{EC}^2) + (-\overline{AE}\cdot\overline{EC} + \overline{BE}\cdot\overline{ED}) \\
&= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 0 = \overline{AB}^2,
\end{aligned}$$

was offensichtlich unabhängig von der Lage von E ist.

2. Beweis (2x Sehnensatz): Der Fußpunkt des Lotes von E auf die Gerade AB sei mit F bezeichnet.

Nun haben die Vierecke $AFED$ und $FBCE$ an den gegenüber liegenden Ecken F und D bzw. F und C rechte Winkel, sie sind also Sehnenvierecke. Nach Sehnensatz gilt also $\overline{AC}\cdot\overline{AE} = \overline{AB}\cdot\overline{AF}$ und $\overline{BD}\cdot\overline{BE} = \overline{BF}\cdot\overline{BA}$; Addition ergibt (weil E im Innern des Kreises mit Durchmesser AB liegt, liegt F im Innern der Strecke AB und es gilt $\overline{AF} + \overline{BF} = \overline{AB}$):



$$\overline{AC}\cdot\overline{AE} + \overline{BD}\cdot\overline{BE} = \overline{AB}\cdot\overline{AF} + \overline{BF}\cdot\overline{BA} = \overline{AB}\cdot(\overline{AF} + \overline{BF}) = \overline{AB}^2.$$

Bemerkung: Der Beweis ist gültig für jede Lage von E, bei der F auf der Strecke AB einschl. ihrer Endpunkte A und B liegt. Die Voraussetzung, dass E im Innern des Kreises mit Durchmesser AB liegt, kann also abgeschwächt werden zur Bedingung $\angle BAE \leq 90°$ und $\angle EBA \leq 90°$. Wenn einer dieser beiden Winkel größer als 90° ist, liegt F nicht zwischen A und B und die Aussage wird zu

$$|\overline{AC}\cdot\overline{AE} - \overline{BD}\cdot\overline{BE}| = \overline{AB}\cdot|\overline{AF} - \overline{BF}| = \overline{AB}^2.$$

3. Beweis (Sinus–Satz): Sei $\alpha = \angle BAE$ und $\beta = \angle EBA$. Weil E im Innern des Kreises mit Durchmesser AB liegt, liegen E, C und D in der gleichen Halbebene bez. der Geraden AB und es gilt $\alpha, \beta < 90°$. Weil nach Thales $\angle ACB = \angle ADB = 90°$, ist $\overline{AC} = \overline{AB} \cdot cos(\alpha)$ und $\overline{BD} = \overline{AB} \cdot cos(\beta)$.

Weiter gilt nach Sinus–Satz $\overline{AE} : \overline{BE} : \overline{AB} = sin(\beta) : sin(\alpha) : sin(\alpha + \beta)$, also $\overline{AE} = \overline{AB} \cdot {}^{sin(\beta)}/_{sin(\alpha+\beta)}$ und $\overline{BE} = \overline{AB} \cdot {}^{sin(\alpha)}/_{sin(\alpha+\beta)}$. Dies setzen wir zusammen zu

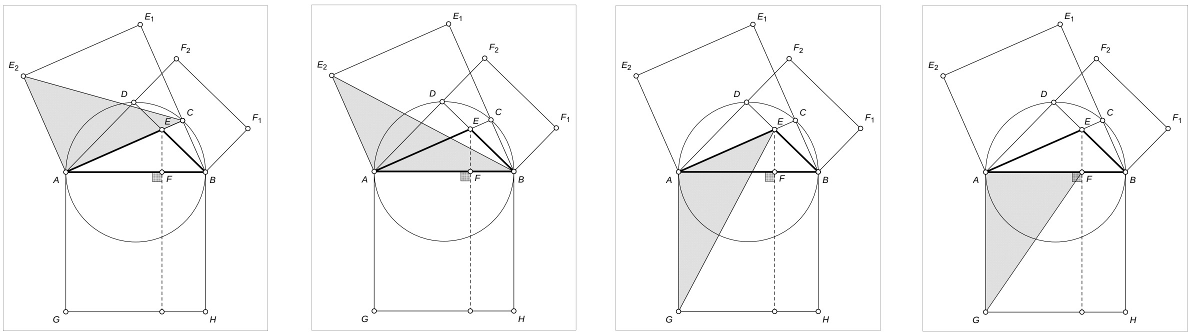
$$\overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{BD} \cdot \overline{BE} = \overline{AB} cos(\alpha) \cdot \overline{AB} \frac{sin(\beta)}{sin(\alpha+\beta)} + \overline{AB} cos(\beta) \cdot \overline{AB} \frac{sin(\alpha)}{sin(\alpha+\beta)} \cdot$$

$$= \overline{AB}^2 \cdot \frac{cos(\alpha) sin(\beta) + cos(\beta) sin(\alpha)}{sin(\alpha+\beta)} = \overline{AB}^2 \cdot \frac{sin(\alpha+\beta)}{sin(\alpha+\beta)}$$

$$= \overline{AB}^2 \text{, dies ist unabhängig von der Lage von } E.$$

Die Beweisführung ist für alle Lagen von E gültig, bei denen $\alpha, \beta < 90°$, also bei denen E, C und D in der gleichen Halbebene bez. der Geraden $\overline{AB}^2$ liegen. Wenn z.B. $\beta > 90°$, dann liegen D und E in verschiedenen Halbebenen bez. AB und es gilt $\overline{BD} = \overline{AB} \cdot cos(180° - \beta) = \overline{AB} \cdot (-cos(\beta))$.

4. Beweis (Variation des Beweises für den Satz des Pythagoras von Euklid): Mit $|X...YZ|$ sei der Flächeninhalt des Vielecks $X...YZ$ bezeichnet. Wir errichten nun über der Seite AC des Dreiecks ABC nach außen ein Rechteck ACE_1E_2 mit $\overline{AE} = \overline{AE_2}$; und über der Seite BC ein Rechteck BF_1F_2D mit $\overline{BE} = \overline{BF_1}$. Die Senkrechte zu AB durch E schneide AB in F.



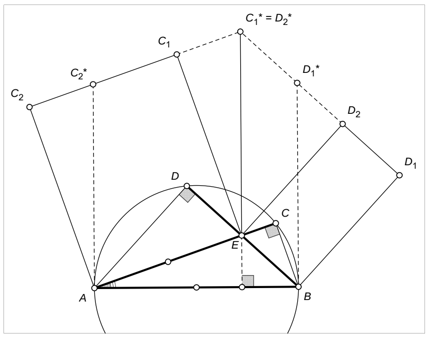
Weil $BE_1 \parallel AE_2$ und $C \in BE_1$, ist $|E_2AC| = |E_2AB|$, eine Drehung um 90° um A überführt Dreieck E_2AB in das flächengleiche Dreieck EAG, wobei $AG \perp AB$ und $\overline{AG} = \overline{AB}$; schließlich hat auch das Dreieck FAG den gleichen Flächeninhalt.

In analoger Weise überführen wir das Dreieck F_1DB in ein flächengleiches Dreieck FHB mit $BH \perp AB$ und $\overline{BH} = \overline{AB}$. Dies setzen wir zusammen zu

$$\overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{BD} \cdot \overline{BE} = 2|E_2AC| + 2|F_1DB| = 2|E_2AB| + 2|F_1AB|$$

$$= 2|EAG| + 2|EHB| = 2|FAG| + 2|FHB|$$

$$= |AGHB| = \overline{AB}^2 .$$

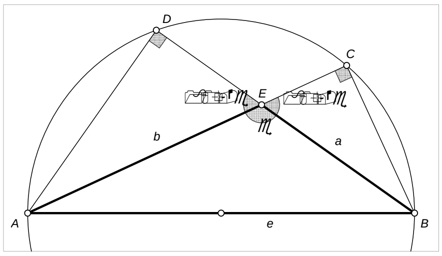


5. Beweis (Pappus): Wir errichten über der Seite AE des Dreiecks ABE nach außen ein Rechteck AEC_1C_2 mit $\overline{AC} = \overline{AC_2}$, und analog über der Seite BE ein Rechteck EBD_1D_2 mit $\overline{BD} = \overline{BD_1}$. Der Ausdruck $\overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{BD} \cdot \overline{BE}$ beschreibt also den Gesamtflächeninhalt dieser beiden Rechtecke.

Der Schnittpunkt der Geraden C_1C_2 mit der Senkrechten auf AB durch E sei C_1*, der Schnittpunkt von D_1D_2 mit dieser Senkrechten sei D_2*. Nach Konstruktion ist $\overline{AC} = \overline{EC_1}$, ferner $\angle BAC = \angle C_1^*EC_1$ und $\angle ACB = \angle EC_1C_1^*$, also sind die Dreiecke ABC und $EC_1^*C_1$ kongruent, insbesondere $\overline{EC_1{}^*} = \overline{AB}$. Mit analoger Schlussweise leitet man her, dass auch $\overline{ED_2{}^*} = \overline{AB}$, also gilt $D_2^* = C_1^*$.

Weil $AE \parallel C_1C_2$, und $C_1^* \in C_1C_2$, können wir das Rechteck AEC_1C_2 einer Scherung unterwerfen, die es in ein Parallelogramm $AEC_1^*C_2^*$ überführt, der Flächeninhalt bleibt dabei konstant. Analog überführen wir das Rechteck EBD_1D_2 in ein flächengleiches Parallelogramm $EBD_1^*D_2^*$. Diese beiden Parallelogramme haben die gemeinsame Grundseite $EC_1^* = ED_2^*$ und weil $AC_2^* \parallel BD_1^* \parallel EC_1^* \perp AB$, haben sie die Gesamthöhe AB. Der Gesamtflächeninhalt ist also $\overline{AB}^2$, unabhängig von der Lage von E, das war zu zeigen.

6. Beweis (Äquivalenz der Aussage mit dem cos–Satz im Dreieck ABE, Variation des 3. Beweises): Weil E im Innern des Kreises mit Durchmesser AB liegt, ist $\varepsilon > 90°$ und E liegt sowohl zwischen A und C als auch zwischen B und D, sodass $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC}$ und $\overline{BD} = \overline{BE} + \overline{ED}$.



Im Dreieck ABE verwenden wir die üblichen Bezeichnungen $a = \overline{BE}$, $b = \overline{AE}$ und $e = \overline{AB}$ für die Seiten und ε für den Innenwinkel bei E. Die Dreiecke EBC und AED sind bei C bzw. D rechtwinklig (Satz von Thales), beide haben bei E den Innenwinkel $180° - \varepsilon < 90°$. Somit ist

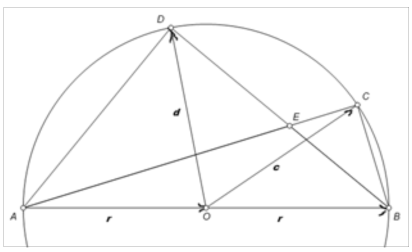
$$cos(\varepsilon) = -cos(180° - \varepsilon) = -\frac{\overline{EC}}{a} = -\frac{\overline{ED}}{b}.$$

Mit cos–Satz im Dreieck ABE erhalten wir

$$\overline{AB}^2 = e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos(\varepsilon) \quad = a(a + (-b \cdot cos(\varepsilon))) + b(b + (-a \cdot cos(\varepsilon)))$$
$$= \overline{AE} \cdot (\overline{AE} + \overline{EC}) + \overline{BE} \cdot (\overline{BE} + \overline{ED}) = \overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{BD} \cdot \overline{BE}$$

tatsächlich unabhängig von der Lage von E.

7. Beweis (vektoriell): Wir wählen den Mittelpunkt der Strecke AB als Ursprung O, definieren $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} = \mathbf{r}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{OD} = \mathbf{d}$ und normieren $|\mathbf{r}| = 1$. Da die Punkte C und D auf dem Kreis um O mit Radius r liegen, gilt auch $|\mathbf{c}| = |\mathbf{d}| = 1$,also $\mathbf{r}^2 = \mathbf{c}^2 = \mathbf{d}^2 = 1$ und $\overline{AB} = 2$. Weiter liegt E auf den Geraden AC und BD, also gibt es reelle Zahlen λ und μ, sodass $\overrightarrow{AE} = \lambda(\mathbf{c} + \mathbf{r})$ und $\overrightarrow{BE} = \mu(\mathbf{d} - \mathbf{r})$.



Dann ist

$$2\mathbf{r} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BE} = \lambda(\mathbf{c} + \mathbf{r}) - \mu(\mathbf{d} - \mathbf{r}),$$

$$\text{also} \quad (2 - (\lambda + \mu))\mathbf{r} = \lambda\mathbf{c} - \mu\mathbf{d}.$$

Weil $\angle BAE \leq 90°$ und $\angle EBA \leq 90°$ (dies ist für jede Lage von E innerhalb des Kreises mit Durchmesser AB erfüllt), sind die Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AE}$ gleichgerichtet, ebenso die Vektoren $\overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{BE}$, sodass $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = \overline{AC} \cdot \overline{AE}$ und ebenso $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BE} = \overline{BD} \cdot \overline{BE}$. Einfache Rechnung ergibt nun:

$$
\begin{aligned}
\overline{AC}\cdot\overline{AE} + \overline{BD}\cdot\overline{BE} &= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BE} \\
&= \lambda(\mathbf{c}+\mathbf{r})^2 + \mu(\mathbf{d}-\mathbf{r})^2 = \lambda\mathbf{c}^2 + 2\lambda\mathbf{cr} + \lambda\mathbf{r}^2 + \mu\mathbf{d}^2 - 2\mu\mathbf{dr} + \mu\mathbf{r}^2 \\
&= 2(\lambda+\mu) + 2\mathbf{r}(\lambda\mathbf{c} - \mu\mathbf{d}) = 2(\lambda+\mu) + 2\mathbf{r}(2-(\lambda+\mu))\mathbf{r} \\
&= 2(\lambda+\mu) + 4\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r}^2(\lambda+\mu) = 4 = \overline{AB}^2,
\end{aligned}
$$

dies ist unabhängig von der Lage von E.

Bemerkungen: Zu jedem Punkt E in der Zeichenebene gibt es (evtl. mit A oder B zusammenfallende) Punkte C und D auf dem Kreis, sodass A, E und C bzw. B, E und D auf einer Geraden liegen; dabei ist C genau dann eindeutig bestimmt, wenn $E \neq A$, entsprechend ist D genau dann eindeutig bestimmt, wenn $E \neq B$. Der Beweis zeigt also, dass die Aussage für beliebige Lagen von E gilt, wenn man die Streckenlängen als Längen gerichteter Strecken versteht; dies muss im Fall $\alpha > 90°$ oder $\beta > 90°$ berücksichtigt werden.

Diese Punktekonstellation war auch Grundlage der Aufgabe 2000.1.3. Dort sind weitere interessante Zusammenhänge formuliert.

Die Lage von E spielt an zwei Stellen eine Rolle: Bei den meisten Beweisansätzen muss der Fall "E auf AB" gesondert betrachtet werden, ebenso muss überlegt werden, ob E zwischen A und C liegt und/oder auch zwischen B und D.

Aufgabe 4: Die Folge (a_n) ist rekursiv definiert durch

$$a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3 \text{ sowie } a_n = \max_{0<d<n} a_d \cdot a_{n-d} \text{ für } n \geq 4.$$

Bestimme die Primfaktorzerlegung von $a_{19702020}$?

Hinweise: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.
Der Ausdruck $\max\limits_{0<d<n} a_d \cdot a_{n-d}$ bezeichnet den größten Wert aller Zahlen $a_1 \cdot a_{n-1}, a_2 \cdot a_{n-2}, \ldots , a_{n-1} \cdot a_1$.

Ergebnis: Es gilt $a_{3k} = 3^k$ für alle $k \geq 1$, also $a_{19702020} = a_{3 \cdot 6567340} = 3^{6567340}$.

1. Beweis: Zunächst vereinfachen wir die Rekursionsformel. Keines der a_i ist negativ und es ist $a_1 = 0$. Somit ist sicher $0 = a_1a_{n-1} \leq a_ia_j$ für alle $2 \leq i,j \leq n-2$, und da $n \geq 4$, gibt es immer ein Indexpaar $(i,j) \neq (1,n-1)$. Also ist es unnötig, für die Bestimmung des Maximalwertes aller Produkte a_da_{n-d} das Produkt a_1a_{n-1} zu untersuchen und es genügt es, Werte d mit $2 \leq d \leq n-2$ zu betrachten. Dies kann man sogar weiter auf Werte $2 \leq d \leq {}^n/_2$ einschränken, da mit wachsendem d jedes Produkt $a_d \cdot a_{n-d}$ mit $d > {}^n/_2$ schon als Produkt $a_{d'} \cdot a_{n-d'}$ mit $d' = n - d < {}^n/_2$ untersucht wurde. Somit können wir die Rekursionsformel auch schreiben als

$$a_n = \max_{2 \leq d \leq \frac{n}{2}} a_d \cdot a_{n-d} \quad \text{für alle } n \geq 4.$$

Wir werden mit vollständiger Induktion nach n zeigen, dass $a_n = 3a_{n-3}$ für alle $n \geq 5$. Zusammen mit $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ und $a_4 = 4 = 2^2$ folgt sofort, dass $a_{n+3k} = a_n \cdot 3^k$ für alle $k \geq 0$; also

$$a_{2+3k} = 2^1 \cdot 3^k,\ a_{3+3k} = 3 \cdot 3^k = 3^{k+1} \text{ und } a_{4+3k} = 2^2 \cdot 3^k \text{....für alle } k \geq 0,$$

und hieraus das oben angegebene Ergebnis.

* Induktionsanfang: Die Aussage ist richtig für $n \in \{5, 6, 7, 8\}$: Einfache Rechnung ergibt nämlich:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,$$

$$a_4 = \max_{2 \leq d \leq \frac{4}{2}} a_d \cdot a_{n-d} = \max\{a_2a_2\} = \max\{2 \cdot 2\} = 4,$$

$$a_5 = \max_{2 \leq d \leq \frac{5}{2}} a_d \cdot a_{5-d} = \max\{a_2a_3\} = \max\{2 \cdot 3\} = 6 = 3a_2,$$

$$a_6 = \max_{2 \leq d \leq \frac{6}{2}} a_d \cdot a_{6-d} = \max\{a_2a_4,\ a_3a_3\} = \max\{2 \cdot 4,\ 3 \cdot 3\} = 9 = 3a_3,$$

$$a_7 = \max_{2 < d < \frac{7}{2}} a_d \cdot a_{7-d} = \max\{a_2a_5,\ a_3a_4\} = \max\{2 \cdot 6,\ 3 \cdot 4\} = 12 = 3a_4,$$

$$a_8 = \max_{2 \leq d \leq \frac{8}{2}} a_d \cdot a_{8-d} = \max\{a_2a_6,\ a_3a_5,\ a_4a_4\} = \max\{2 \cdot 9,\ 3 \cdot 6,\ 4 \cdot 4\} = 18 = 3a_5,$$

* Induktionsannahme: Für ein bestimmtes $n \geq 8$ sei die Aussage richtig für alle Zahlen 5, 6, 7, ... n.

* Induktionsschluss: Dann ist die Aussage auch richtig für $n + 1$. Es gilt nämlich

$$a_{n+1} = \max_{2 \leq d \leq \frac{n+1}{2}} a_d \cdot a_{n+1-d} \overset{1)}{=} \max_{2 \leq d \leq \frac{n+1}{2}} a_d \cdot 3 \cdot a_{n+1-d-3} \overset{2)}{=} 3 \cdot \max_{2 \leq d \leq \frac{n+1}{2}} a_d \cdot a_{n-2-d} = 3a_{n-2}.$$

1) Für $n \geq 8$ ist $n + 1 - d \geq (n + 1) - {}^{(n+1)}/_2 = {}^{(n+1)}/_2 \geq 4{,}5$; und da der Index ganzzahlig ist, sogar $n + 1 - d \geq 5$. Also können wir auf a_{n+1-d} die Induktionsannahme $a_{n+1-d} = 3 \cdot a_{n+1-d-3}$ anwenden.

[2] Es würde sogar $2 \le d \le \frac{n-2}{2}$ genügen.

Zur Illustration konkret für a_9: Es ist $a_9 = \max\limits_{2 \le d \le \frac{9}{2}} a_d \cdot a_{9-d} = \max\{a_2a_7, a_3a_6, a_4a_5\}$

$= \max\{a_2 \cdot 3 \cdot a_4, a_3 \cdot 3 \cdot a_3, a_4 \cdot 3 \cdot a_2,\} = 3 \cdot \max\{a_2a_4, a_3a_3, a_4a_2\} = 3a_6$.

2. Beweis: Wir werden zeigen, dass für alle $n \ge 2$ stets $a_n = a_{3m-j} = 2^j \cdot 3^{m-j}$ ($m \ge 0$, $j \in \{0, 1, 2\}$, das Paar (m,j) ist nach Vorgabe von n eindeutig bestimmt). Insbesondere ist dann

$a_{19702020} = a_{3 \cdot 6567340 - 0} = 3^{6567340}$.

Zunächst stellen wir fest, dass keines der a_i negativ ist, ferner ist $a_1 = 0$. Somit ist sicher $0 = a_1a_{n-1} \le a_ia_j$ für alle $2 \le i,j \le n-2$, und da $n \ge 4$, gibt es immer ein Indexpaar $(i,j) \ne (1,n-1)$, also ist es unnötig, für die Bestimmung des Maximalwertes aller Produkte a_da_{n-d} das Produkt a_1a_{n-1} zu untersuchen. Somit können wir die Rekursionsformel der Folge (a_n) einfacher schreiben als

$$a_n = \max_{2 \le d \le n-2} a_d \cdot a_{n-d} \quad \text{für alle } n \ge 4.$$

Nun betrachten wir die Folge (b_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$ mit $b_{3m-j} = 2^j \cdot 3^{m-j}$, $j \in \{0, 1, 2\}$, $m = 1\ 2\ 3, \ldots$. Jedes Glied dieser Folge ist eindeutig definiert. Weiter gilt $a_2 = 2 = 2^1 \cdot 3^{1-1} = b_{3 \cdot 1 - 1} = b_2$ und $a_3 = 3 = 2^0 \cdot 3^1 = b_{3 \cdot 1 - 0} = b_3$. Um nachzuweisen, dass $a_n = b_n$ für alle $n \ge 2$, genügt es also, noch zu zeigen, dass beide Folgen die gleiche Rekursionsformel für $n \ge 4$ besitzen, d.h. dass

$$b_n = \max_{2 \le d \le n-2} b_d \cdot b_{n-d} \quad \text{für alle } n \ge 4.$$

Hierzu vereinfachen wir das Produkt $b_d \cdot b_{n-d}$ für alle n und $2 \le d \le n-2$, wobei wir die Fälle $m \equiv 0, 1, 2 \mod 3$ unterscheiden und in diesen Fällen die Unterfälle $d \equiv 0, 1, 2 \mod 3$.

Fall 1: $n = 3m$, ($m \ge 2$, wegen $n \ge 4$ muss $m < 2$ nicht untersucht werden):

$d = 3k$: $b_d \cdot b_{n-d} = b_{3k-0} \cdot b_{3(m-k)-0} = 2^0 \cdot 3^k \cdot 2^0 \cdot 3^{m-k} = 2^0 \cdot 3^m$,

$d = 3k+1$: $b_d \cdot b_{n-d} = b_{3(k+1)-2} \cdot b_{3m-(3k+1)} = 2^2 \cdot 3^{k-1} \cdot 2^1 \cdot 3^{m-k-1} = 2^3 \cdot 3^{m-2}$,

$d = 3k+2$: $b_d \cdot b_{n-d} = b_{3(k+1)-1} \cdot b_{3m-(3k+2)} = 2^1 \cdot 3^{k+1-1} \cdot 2^2 \cdot 3^{m-k-2} = 2^3 \cdot 3^{m-2}$,

Es ist stets $2^3 \cdot 3^{m-2} = 8 \cdot 3^{m-2} < 9 \cdot 3^{m-2} = 2^0 \cdot 3^m$, und der Unterfall $d = 3k+2 = 3 \cdot 0 + 2$ kommt für jeden Index n vor, also gilt

$$b_{3m} = \max_{2 \le d \le 3m-2} b_d \cdot b_{3m-d} = 2^0 \cdot 3^m = b_{3m-0}.$$

Fall 2: $n = 3m+1$ mit $m \ge 1$, also $n = 3(m+1)-2$:

$d = 3k$: $b_d \cdot b_{n-d} = b_{3k-0} \cdot b_{3(m+1)-2-3k} = 2^0 \cdot 3^k \cdot 2^2 \cdot 3^{m+1-k-2} = 2^2 \cdot 3^{m-1}$,

$d = 3k+1$: $b_d \cdot b_{n-d} = b_{3(k+1)-2} \cdot b_{3(m+1)-2-(3k+1)} = 2^2 \cdot 3^{k-1} \cdot 2^0 \cdot 3^{m-k} = 2^2 \cdot 3^{m-1}$,

$d = 3k+2$: $b_d \cdot b_{n-d} = b_{3(k+1)-1} \cdot b_{3(m+1)-2-(3k+2)} = 2^1 \cdot 3^{k+1-1} \cdot 2^1 \cdot 3^{m-k-1} = 2^2 \cdot 3^{m-1}$,

also gilt $b_{3m+1} = \max\limits_{2 \le d \le 3(m+1)-2-2} b_d \cdot b_{3m+1-d} = 2^2 \cdot 3^{m-1} = b_{3(m+1)-2}$.

Fall 3: $n = 3m+2$ mit $m \ge 1$, also $n = 3(m+1)-1$:

$d = 3k$: $b_d \cdot b_{n-d} = b_{3k-0} \cdot b_{3(m+1)-1-3k} = 2^0 \cdot 3^k \cdot 2^1 \cdot 3^{m-k+1-1} = 2^1 \cdot 3^m$,

$d = 3k+1$: $b_d \cdot b_{n-d} = b_{3(k+1)-2} \cdot b_{3(m+1)-1-(3k+1)} = 2^2 \cdot 3^{k-1} \cdot 2^2 \cdot 3^{m-k-1} = 2^4 \cdot 3^{m-2}$,

$d = 3k+2$: $b_d \cdot b_{n-d} = b_{3(k+1)-1} \cdot b_{3(m+1)-1-(3k+2)} = 2^1 \cdot 3^{k+1-1} \cdot 2^0 \cdot 3^{m-k} = 2^1 \cdot 3^m$,

Es ist stets $2^4 \cdot 3^{m-2} = 2^3 \cdot 2^1 \cdot 3^{m-2} < 3^2 \cdot 2^1 \cdot 3^{m-2} = 2^1 \cdot 3^m$,
und der Unterfall $d = 3k+2 = 3 \cdot 0 + 2$ kommt für jeden Index n vor, also gilt

$b_{3m+2} = \max\limits_{2 \le d \le 3m+2-2} b_d \cdot b_{3m-d} = 2^1 \cdot 3^m = b_{3(m+1)-1}$, das war zu zeigen.

Bemerkung: Setzt man $a_1 = {}^4/_3$ und lässt alle anderen Bedingungen unverändert, so erhält man für $n \geq 2$ die gleiche Folge. Dann gilt die Beziehung $a_n = 3a_{n-3}$ schon $n \geq 4$, und im 2. Beweis gilt auch $b_1 = a_1$, sodass der Induktionsanfang nur für $n \leq 4$ gezeigt werden muss.