BUNDESWETTBEWERB
MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

2. Runde 2020

Vorläufige Fassung
für die
Homepage

» KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT

» BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: 01. September 2020

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium
für Bildung
und Forschung

STIFTERVERBAND

KULTUSMINISTER
KONFERENZ

Aufgabe 1: Leo und Smilla finden 2020 Goldnuggets mit den Massen 1, 2, ... , 2020 Gramm, die sie nach folgender Regel auf eine rote und eine blaue Schatztruhe verteilen:

Zuerst wählt Leo eine der Schatztruhen und nennt Smilla die Farbe der Truhe. Anschließend wählt Smilla eines der noch nicht verteilten Nuggets und legt es in diese Truhe.

Dies wiederholen sie, bis alle Nuggets verteilt sind. Danach wählt Smilla eine der beiden Schatztruhen und bekommt alle Nuggets in dieser Truhe.

Wie viel Gramm Gold kann Smilla auf diese Weise mindestens für sich garantieren?

Bemerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Ergebnis: Smilla kann garantieren, dass sie mindestens 1.021.615g Gold erhält.

Beweis: Zuerst geben wir eine Strategie für Leo an, mit der er verhindern kann, dass eine der beiden Truhen mehr als 1.021.615 g Gold erhält. Er wählt jedes Mal, wenn er an der Reihe ist und die beiden Truhen verschiedenes Gewicht an Gold enthalten, diejenige mit weniger Gold; und wenn beide Truhen gleich viel Gold enthalten, eine beliebige. Da Smilla bei jedem ihrer Züge höchstens 2020g Gold in eine Truhe legen kann, ist mit dieser Strategie nach jedem ihrer Züge die schwerere Kiste höchstens um 2020g schwerer, d.h. um höchstens 1010g schwerer als der Mittelwert aus beiden Gewichten. Am Ende ist das Gesamtgewicht des Goldes in den beiden Kisten nach bekannter Summenformel 1g + 2g + ... + 2020g = $\frac{1}{2} \cdot 2020 \cdot 2021$g, also hat die schwerere Kiste am Ende höchstens das Gewicht $\frac{1}{2} \cdot 2020 \cdot 2021\text{g} \cdot \frac{1}{2} + 1010 = 1.021.615$g.

Nun geben wir eine Strategie für Smilla an, mit der sie verhindern kann, dass beide Truhen weniger als 1.021.615g Gold enthalten. Sie legt das Nugget mit 2020g zur Seite und verteilt die restlichen Nuggets so in zwei Haufen T_{blau} und T_{rot}, auf, dass beide Haufen das gleiche Gewicht haben. Dies ist auf vielerlei Arten möglich, z.B (angegeben werden nur die Maßzahlen der Gewichte der einzelnen Nuggets)

$$T_{blau} = \{2019, \quad 2016, \quad 2015, \quad 2012, \quad 2011, \quad 2008, \quad \ldots, \quad 7, \quad 4, \quad 3\},$$

$$T_{rot} = \{2018, 2017, \quad 2014, 2013, \quad 2010, 2009, \quad \ldots, \quad 5, 6, \quad 2, 1\};$$

aus der Anordnung ist auch ohne konkrete Berechnung sofort ersichtlich, dass beide Haufen die gleiche Masse haben.

Wenn Leo die Farbe "*blau*" wählt und im Haufen T_{blau} noch Nuggets sind, legt Smilla ein Nugget aus T_{blau} in die blaue Truhe, und wenn Leo die Farbe "*rot*" wählt und in T_{rot} noch Nuggets sind, legt sie ein Nugget aus T_{rot} in die rote Truhe. Irgendwann tritt zum ersten Mal der Fall auf, dass Leo eine Farbe wählt, für die der zugehörige Haufen leer ist. Dann legt Smilla das Nugget 2020 in die Truhe mit der gewählten Farbe. Das Gold in dieser Truhe hat dann nach Smillas Zug eine Masse, die um mindestens 2020g größer ist als die Masse in der anderen Truhe. Dieser Wert ist – wie oben berechnet – 1.021.615g, und da im weiteren Verlauf der Verteilung nichts aus der Truhe genommen wird, wird die Masse nicht kleiner.

Bemerkung: Die Masse von T_{rot} und T_{blau} ist jeweils $\frac{1}{2} \cdot 2019 \cdot 2020\text{g} \cdot \frac{1}{2} = 1.019.595$g; es ist unnötig, dies zu berechnen. Die Berechnung bestätigt allerdings die Schranke aus Smillas Strategie. Sie bekommt mindestens

Summe aller Gewichte aus T_{rot} (oder T_{blau}) + 2020 g = 1.019.595g + 2020g = 1.021.615g.

Wenn man die Verteilung konkret durchführen würde und dabei die Nuggets ohne Zwischenraum schichten kann, genügen zwei Truhen mit je ca. 53l Inhalt, d.h. zwei mittlere Bierfässer (Zylinder mit 45cm Höhe, 40cm Durchmesser). Zum Wegtragen benötigt man allerdings etwas Hilfe und einen guten Sicherheitsdienst: Jede Truhe wiegt mehr als 1to, und das Gold würde ca. 102 Mio.€ kosten. Hans im Glück hätte mit den prinzipiell gleichen Problemen zu kämpfen.

Aufgabe 2:

Beweise: Es gibt keine rationalen Zahlen x,y,z mit $x + y + z = 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 100$.

1. Beweis (durch Widerspruch): Wir nehmen an, es gäbe rationale x,y,z, die beide Gleichungen gleichzeitig erfüllen. Dann gibt es ganzzahlige p,q,r,s mit $x = {}^r/_p$, $y = {}^s/_q$. Erweitern oder Kürzen auf den kleinsten gemeinsamen Nenner ergibt $x = {}^a/_c$, $y = {}^b/_c$ mit ganzen Zahlen a,b,c und $ggT(a,b,c) = 1$, $c > 0$.

Die erste Gleichung ist äquivalent zu $x + y = -z$. Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt die notwendige Bedingung $x^2 + y^2 + (x + y)^2 = 100$, was äquivalent ist zu $x^2 + xy + y^2 = 50$, es gibt also

a,b,c ganz, $c > 0$, $ggT(a,b,c) = 1$ und $a^2 + ab + b^2 = 2 \cdot (5c)^2$, (*).

Für jede zulässige Wahl von a,b,c führt dies aber zum Widerspruch: Es können nicht a und b beide gerade sein, weil dann die linke Seite durch 4 teilbar ist, die rechte aber – wegen $ggT(a,b,c) = 1$ ist nun c ungerade – nur durch 2, aber nicht durch 4. Und wenn mindestens eine der beiden Zahlen a und b ungerade ist, dann hat die linke Seite von (*) genau einen oder genau drei ungerade Summanden, ist also selbst ungerade im Gegensatz zur rechten Seite.

Motivation für den folgenden 2. Beweis: Deutet man die Lösungstripel $(x|y|z)$ des vorgegebenen Gleichungssystems als kartesische Koordinaten von Punkten im dreidimensionalen Raum, so beschreibt die Menge der Lösungstripel den Schnitt der Ebene mit Normalengleichung $x + y + z = 0$ mit der Kugel um den Ursprung mit Radius 10. Eine einfache Gleichung dieser Ebene in Parameterform leiten wir mit schulüblichen Mitteln her, z.B.

$\vec{x}(\lambda,\mu) = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, d.h. $x = (\lambda + \mu)$ (1), $y = (\lambda - \mu)$ (2), $z = -2\lambda$; man überprüft schnell, dass dann $\lambda = {}^1/_2(x + y)$, $\mu := {}^1/_2(x - y)$.

2. Beweis: Jedem Tripel (x,y,z) reeller Zahlen x,y,z ordnen wir mittels $\lambda := {}^1/_2(x + y)$, $\mu := {}^1/_2(x - y)$ ein Paar reeller Zahlen (λ,μ) zu. Ist zusätzlich $x + y + z = 0$, so sind zu jedem vorgegebenen λ,μ die ursprünglichen Werte $x = \lambda + \mu$, $y = \lambda - \mu$, $z = -2\lambda$ eindeutig rekonstruierbar. Nun gilt

$$100 = x^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow (\lambda + \mu)^2 + (\lambda - \mu)^2 + (-2\lambda)^2 = 100 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 2\mu^2 + 4\lambda^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow 3\lambda^2 + \mu^2 = 50. \quad (*)$$

Offensichtlich gilt: x,y,z rational $\Leftrightarrow$ λ,μ rational. Also genügt es zu zeigen, dass (*) für kein Paar rationaler Zahlen λ,μ erfüllt wird.

Seien also λ,μ rational, dann gibt es ganzzahlige p,q,r,s mit $\lambda = {}^r/_p$, $\mu = {}^s/_q$. Erweitern auf einen gemeinsamen Nenner ergibt $\lambda = {}^b/_c$, $\mu = {}^a/_c$ und somit die notwendige Bedingung

Es gibt ganze Zahlen a,b,c, mit $c > 0$ und $a^2 + 3b^2 = 50c^2$. (**)

Diese Bedingung kann nicht erfüllt werden, dies zeigen wir auf verschiedene Arten:

<u>Variante 1</u>:, Wir klammern von den Summanden a^2 und $3b^2$ die höchste gemeinsame Zweierpotenz aus, diese hat – weil a^2 und b^2 Quadratzahlen sind – einen geraden Exponenten. Wir schreiben also $a^2 + 3b^2 = 2^{2r}\cdot(v_1 + 3v_2)$ für geeignete ganze Zahlen r, v_1 und v_2. Dann sind entweder v_1 und v_2 beide ungerade Quadratzahlen, also $v_1 + 3v_2 \equiv 0 \; mod\; 4 = 2^2$, und $v_1 + 3v_2 \equiv 4 \; mod\; 8$, oder genau eine der Zahlen v_1 und v_2 ist gerade und die andere ungerade, also ist $v_1 + 3v_2$ sicher ungerade. In beiden Fällen kommt in der Primfaktorzerlegung von $2^{2r} \cdot (v_1 + 3v_2)$ der Faktor 2 geradzahlig oft vor. Im Widerspruch dazu enthält der der Ausdruck $50c^2 = 2\cdot(5c)^2$ auf der rechten Seite von (*) den Faktor 2 ungeradzahlig oft.

<u>Variante 2</u>: (Betrachtung über die Endziffern der Zahlen auf beiden Seiten, das könnte auch als Betrachtung mod 10 formuliert werden): O.B.d.A nehmen wir an, dass $ggT(a,b,c) = 1$ (andernfalls dividieren wir beide Seiten von (**) durch $[ggT(a,b,c)]^2$.

Die rechte Seite $50c^2$ hat Endziffer 0, also auch die linke. Die Endziffer von a^2 kann nur eine der Ziffern 0, 1, 4, 5, 6, oder 9 sein, die von $3b^2$ kann nur eine der Ziffern 0, 3, 2, 5, 8, oder 7 sein. Man überprüft schnell mit Kopfrechnen, dass die Summe $a^2 + 3b^2$ nur dann Endziffer 0 haben kann, wenn a^2 und $3b^2$ beide Endziffer 0 oder beide Endziffer 5 haben, was wiederum nur sein kann, wenn a und b beide die Endziffer 0 haben oder beide die Endziffer 5. Im ersten Fall haben dann a^2 und b^2 mindestens zwei Endziffern 0, der Ausdruck $a^2 + 3b^2$ also ebenfalls. Im zweiten Fall haben a^2 und b^2 beide die Endziffern 025, 225 oder 625, der Ausdruck $a^2 + 3b^2$ also die Endziffer 100, 300, 500, 700, oder 900.

Die rechte Seite $50c^2$ hat nur dann mehr als eine Endziffer 0, wenn c^2 eine gerade Endziffer hat. Die Endziffer kann nicht 0 sein, weil sonst die Zahl 5 ein gemeinsamer Teiler von a, b und c wäre. Wenn aber die Endziffer von c gerade ist und $c \neq 0$, dann endet die Zahl $50c^2$ auf 200, 400, 600 oder 800. In keinem Fall kann also (**) erfüllt werden.

<u>Variante 3</u>: Bei der Herleitung von $\lambda = {}^b/_c$, $\mu = {}^a/_c$ können wir o.B.d.A. $ggT(a,b,c) = 1$ annehmen (andernfalls kürzen wir geeignet). Dann ist mindestens eine der Zahlen a,b,c nicht durch 3 teilbar. Falls dies c ist, lässt die rechte Seite von (**) bei Division durch 3 den Rest 2, die linke Seite aber den Rest 1 oder 0. Falls dies a ist, lässt die rechte Seite den Rest 0 oder 2, die linke aber den Rest 1. Falls dies b ist, bemühen wir die Division durch 9: hier lässt a^2 einen der Reste 0, 1, 4, oder 7, $3b^2$ den Rest 3, also $a^2 + 3b^2$ einen der Reste 3, 4, 7 oder 1, die rechte Seite lässt aber immer einen der Reste 0, 2, 5 oder 8. In jedem Fall kann also (**) nicht erfüllt werden, das war zu zeigen.

3. Beweis: Deutet man die Lösungstripel $(x|y|z)$ des vorgegebenen Gleichungssystems als kartesische Koordinaten von Punkten im dreidimensionalen Raum, so beschreibt die Lösungsmenge des vorgegebenen Gleichungssystems die Schnittmenge der Ebene mit Normalengleichung $x + y + z = 0$ mit der Kugel um den Ursprung mit Radius 10, und da diese Ebene den Mittelpunkt dieser Kugel enthält, ist dies ein Kreis mit Radius 10.

Wir bestimmen nun eine Orthonormalbasis $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ im $\mathbb{R}^3$, bei der die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in der Ebene $E: x + y + z = 0$ liegen. Die Koordinaten eines Punktes bezüglich dieser Basis nennen wir (a,b,c). Die Ebene E wird beschrieben durch die Gleichung $c = 0$, der Schnittkreises durch $a^2 + b^2 = 100$.

Ein solche Basis ist $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; man bestätigt schnell mit Kopfrechnen, dass jeder der drei Vektoren die Länge 1 hat, dass sie paarweise senkrecht aufeinander stehen (Skalarprodukt hat jeweils den Wert Null) und dass der dritte Vektor ein Vielfaches des Normalenvektor der Ebene E ist. Für die Umrechnung der Koordinaten gilt nun

$$x = \tfrac{1}{\sqrt{2}}a + \tfrac{1}{\sqrt{6}}b + \tfrac{1}{\sqrt{3}}c\,, \qquad y = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}a + \tfrac{1}{\sqrt{6}}b + \tfrac{1}{\sqrt{3}}c\,, \qquad z = -\tfrac{2}{\sqrt{6}}b + \tfrac{1}{\sqrt{3}}c,$$

und wir bestätigen schnell, dass

$$x - y = \tfrac{2}{\sqrt{2}}a, \qquad x + y - 2z = \tfrac{6}{\sqrt{6}}b, \qquad x + y + z = \tfrac{3}{\sqrt{3}}c. \qquad (***)$$

Sind nun x,y,z rational, dann gibt es Tripel ganzer Zahlen r,s,t, für die $a = \frac{r}{t}\sqrt{2}$, $b = \frac{s}{t}\sqrt{6}$, dabei können wir das Tripel auswählen, für das $ggT(r,s,t) = 1$. Also ist $100 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 100t^2 = 2r^2 + 6s^2$ $\Leftrightarrow 50t^2 = r^2 + 3s^2$. Ab hier schließen wir wie im 2. Beweis.

(Wir können diesen Beweis auch mit der Variablentransformation (***) beginnen und dann mit mühsamer Umrechnung zeigen, dass unter der Bedingung $x + y + z = 0$ folgt, dass $a^2 + b^2 = 100$.)

Bemerkungen: Eine andere Wahl der Richtungsvektoren in der Ebenengleichung führt zu andern einfachen Gleichungen. So führt z.B. $\vec{x}(\lambda,\mu) = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ bei analoger Argumentation wie im 2. Beweis über $x = \lambda$, $y = \mu$, $z = -\lambda - \mu = -(x + y)$ zur Gleichung $x^2 + xy + y^2 = 50$ aus dem 1. Beweis.

Die Variablentransformation im 3. Beweis kann man auch herleiten, indem man die Objekte im Raum so bewegt, dass der Mittelpunkt der Kugel im Ursprung verbleibt und der Normalenvektor von E auf die z–Achse zu liegen kommt und dies durch eine 3x3–Matrix beschreibt. Die Kugel ist bei einer solchen Abbildung invariant, d.h. die Schnittmenge ist nun eine Kreis in der x–y–Ebene mit Radius 10. Da der Normalenvektor von E die Raumdiagonale im Einheitswürfel ist, kann man dies beschreiben als Kombination einer Drehung um 45° um die z – Achse (danach ist der Normalenvektor von E in der y–z–Ebene) und anschließender Drehung um die x–Achse um denjenigen Winkel α, den die Raumdiagonale im Einheitswürfel mit einer Kante einschließt. Hier erkennt man, warum die Größen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ bei der Berechnung auftauchen.

Aufgabe 3: Zwei Geraden m und n schneiden sich in genau einem Punkt P. Ein Punkt M bewegt sich auf m mit konstanter Geschwindigkeit, ein weiterer Punkt N bewegt sich auf n mit derselben Geschwindigkeit; dabei passieren sie beide den Punkt P, aber nicht gleichzeitig.

Beweise: Es gibt einen festen, von P verschiedenen Punkt Q so, dass die Punkte P, Q, M und N zu jedem Zeitpunkt auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Antwort: Der Punkt Q ist Schnittpunkt dreier Linien: i) Umkreis von Dreieck MPN, ii) Mittelsenkrechte der Seite MN, iii) der Außenwinkelhalbierenden von Dreieck MPN durch P, wenn die Lage von M und N so gewählt ist, dass beide Punkte M und N den Punkt P passiert oder beide nicht passiert haben; iv) die Innenwinkelhalbierende von Dreieck MPN durch P, wenn genau einer der Punkte M und N den Punkt P passiert hat. (Eine weitere Charakterisierung dieser Winkelhalbierenden findet sich im 3. Beweis.)

Somit kann Q auf folgende Weisen beschrieben werden:

1. Wir betrachten eine spezielle Lage der Punkte M und N bevor (oder nachdem) beide den Punkt P passiert haben. Q ist dann der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf MN mit der Außenwinkelhalbierenden im Dreieck PMN durch P.

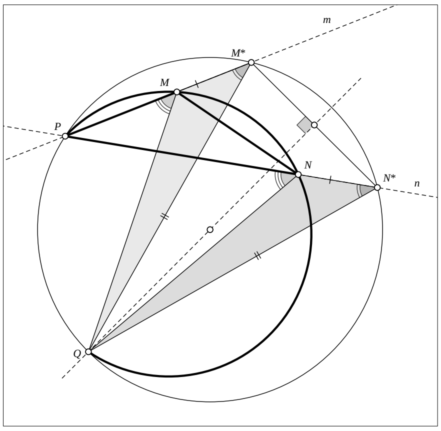
2. Wir betrachten die Punkte M und N zu dem Zeitpunkt, wenn einer der beiden Punkte den Punkt P passiert hat, der andere aber noch nicht und $|MP| = |NP|$. Dann ist Q der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf der Strecke MN (gleichzeitig Winkelhalbierende im Dreieck MNP durch von P) mit demjenigen Bogen des Umkreises von Dreieck MPN, der den Punkt P nicht enthält.

Eine weitere mögliche Definition ist im 6. Beweis benützt, sie beruht implizit auf folgender Eigenschaft:

3. Q ist der Brennpunkt derjenigen Parabel, die die Hüllkurve der Schar der Geraden MN ist.

Bemerkungen: Die Aussage gilt auch unter folgender schwächeren Voraussetzung: Ein Punkt M bewegt sich auf m mit konstanter Geschwindigkeit v_1, ein weiterer Punkt N bewegt sich auf n mit der konstanten Geschwindigkeit v_2; dabei passieren sie beiden den Punkt P, aber nicht gleichzeitig. Dies wird im 5. und 6. Beweis gezeigt.

1. Beweis (Kongruenz von Dreiecken): Seien M^* und N^* zwei Punkte auf m bzw. n , die von M bzw. N gleichzeitig erreicht werden, bevor beide P passiert haben (1. Figur) oder nachdem beiden passiert haben (2. Figur).. Da die Punkte M und N sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen, gilt stets $|MM^*| = |NN^*|$, und da sie sich beide in Richtung P bewegen, liegen M und N stets in der gleichen Halbebene bez. der Geraden M^*N^*.

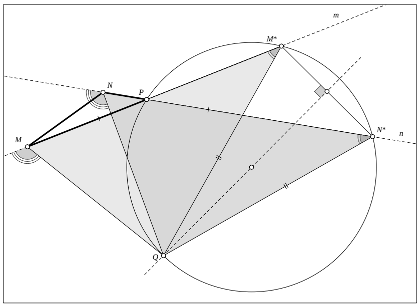


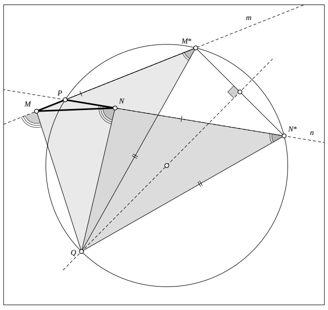
Da M und N den Punkt P zu verschiedenen Zeiten passieren, die Punkte M^* bzw. N^* aber zur gleichen Zeit, haben PM^* und PN^* verschiedene Längen, d.h. das Dreieck PM^*N^* ist nicht gleichschenklig mit Basis M^*N^*. Also schneidet die Mittelsenkrechte von M^*N^* den Umkreis von Dreieck PM^*N^* in zwei von P verschiedenen Punkten; dabei liegt einer der beiden in der gleichen Halbebene bez. M^*N^* wie P; diesen nennen wir Q und werden zeigen, dass er die verlangten Eigeschaften hat.

Der Punkt Q liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke M^*N^*, also ist das Dreieck QM^*N^* gleichschenklig mit Basis M^*N^*, d.h. $|QM^*| = |QN^*|$.

Die Strecke PQ ist Sehne im Umkreis des Dreiecks PM^*N^*. Obige Lagediskussion stellt sicher, dass M^* und N^* beide auf dem gleichen Kreisbogen über PQ liegen. Also gilt nach Umfangswinkelsatz $\angle PM^*Q = \angle PN^*Q$. Da sich die Punkte M und N mit gleicher Geschwindigkeit bewegen, gilt stets $|NN^*| = |MM^*|$, und weiter, dass die Punkte M und N beide auf der Halbgeraden $[M^*P$ bzw. $[N^*P$ liegen oder beide nicht. Also sind die Dreiecke QN^*N und QM^*M nach sws kongruent; dabei haben wir berücksichtigt, dass aufgrund der obigen Lagediskussion die Winkel $\angle PM^*Q$ und $\angle PN^*Q$ entweder beide Innenwinkel an den Ecken N^* bzw. M^* sind (wie in der Figur) oder beide Außenwinkel (wenn die Punkte M und N eine Lage haben bevor sie M^* bzw. N^* passiert haben).

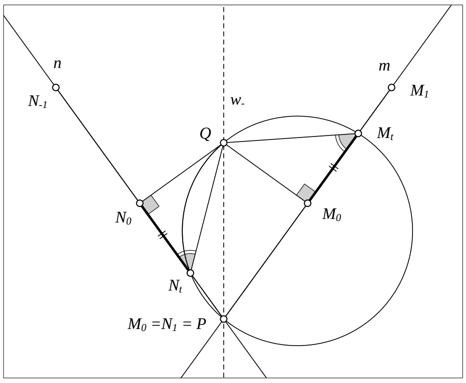
Damit gilt auch $\angle PMQ = \angle PNQ$, sodass nach Umfangswinkelsatz auch die Punkte P, Q, M und N auf einem Kreis liegen. Dies gilt auch für die Lagen, bei denen die Punkte M und N auf verschiedenen Seiten der Geraden PQ liegen, d.h. wenn einer der Punkte M,N den Punkt P passiert hat, der andere aber noch nicht: dann ist genau einer der beiden Winkel ein Außenwinkel des Vierecks $QN'PM'$ ist, d.h. der zugehörige Innenwinkel ergänzt sich mit dem gegenüberliegenden Innenwinkel zu 180°; in diesem Fall ist $QNPM$ ein Sehnenviereck.





Damit ist Q der gesuchte Punkt.

2. Beweis (Variante des ersten Beweises): Mit M_t und N_t sei die Lage der Punkte zum Zeitpunkt t bezeichnet, wobei die Zeitmessung so normiert sei, dass der Punkt M den Punkt P zum Zeitpunkt $t = –1$ passiert und der Punkt N zum Zeitpunkt $t = 1$. Es ist also $M_{–1} = P = N_1$, ferner ist $|N_0P| = |PM_0|$.

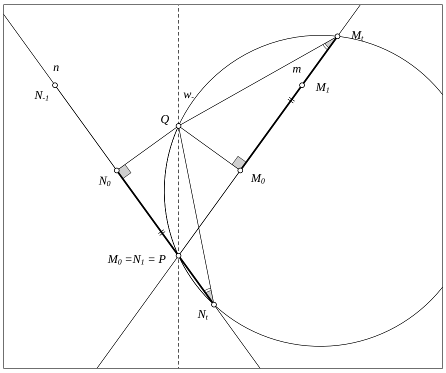


Die Winkelhalbierende des Dreiecks M_0PN_0 durch P bezeichnen wir mit $w_–$, sie ist eine der beiden von m und n verschiedenen Symmetrieachsen, bezüglich derer m und n symmetrisch liegen. (Falls sich m und n sich rechtwinklig schneiden, sind auch m und n selbst Symmetrieachsen.) Offensichtlich liegen auch $M_{–t}$ und Nt für alle t symmetrisch bezüglich $w_–$, und da P ebenfalls auf $w_–$ liegt, erhalten wir jedes Dreieck $PN_{–t}M_{–t}$ durch Spiegelung des Dreiecks PM_tN_t an $w_–$; dass dabei die Bezeichnungen M und N vertauscht sind, ist für die Betrachtung der Umkreise dieser Dreiecke unerheblich. Es genügt also zu zeigen, dass es einen Punkt Q auf $w_–$ gibt, der die Bedingung der Aufgabe für alle $t \geq 0$ erfüllt.

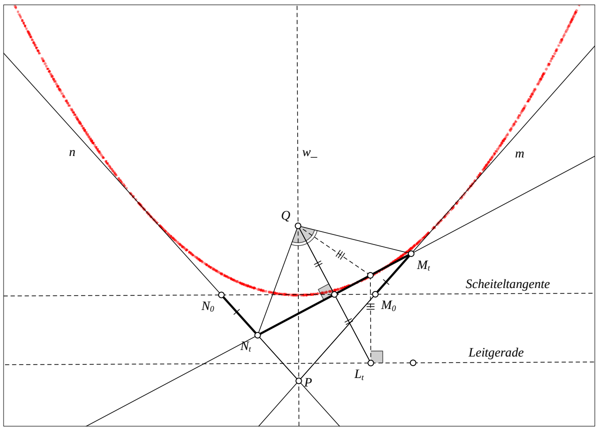
Betrachten wir zunächst das Dreieck N_0PM_0, es ist gleichschenklig mit Basis M_0N_0. Wenn es einen Punkt Q gibt, der die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, dann ist es der von P verschiedene Schnittpunkt seines Umkreises mit $w_–$. Aus Symmetriegründen ist PQ Durchmesser des Kreises, also ist $\angle M_tM_0Q = \angle PN_0Q = 90°$, ferner gilt $|QM_0| = |QN_0|$.

Nun betrachten wir ein Dreieck M_tPN_t mit beliebigem $t > 0$. Es ist $|QM_0| = |QN_0|$, $|M_0M_t| = |N_0N_t|$ und $\angle M_tM_0Q = \angle N_tN_0Q = 90°$, also sind die Dreiecke QN_0N_t und QM_0M_t nach *sws* kongruent. Also ist auch $\angle N_tQM_t = \angle N_0QM_0 = 180° – \angle M_0PN_0$ und $\angle QN_tN_0 = \angle QM_tM_0$ für alle t.

Falls $t < 1$, ist M_tQN_tP ein konvexes Viereck, in dem sich die Winkel an den gegenüber liegenden Ecken zu 180° ergänzen, es ist also ein Sehnenviereck. Falls $t = 1$, ist $N_1 = P$, und P liegt auf dem Umkreis von Dreieck N_1M_1Q. Falls $t > 1$ – weitere Fälle gibt es nicht – ist ist QPN_tM_t ein konvexes Viereck, in dem $\angle QN_tP = \angle QN_tN_0 = \angle QM_tM_0 = \angle QM_tP$ gilt, d.h. die Winkel bei N_t und M_t sind über der Strecke PQ gleich, und N_t und M_t liegen auf der gleichen Seite der Geraden QP. Also liegen nach Umfangswinkelsatz auch hier die Punkte M_t, N_t, P und Q auf einem Kreisbogen über der Strecke PQ.

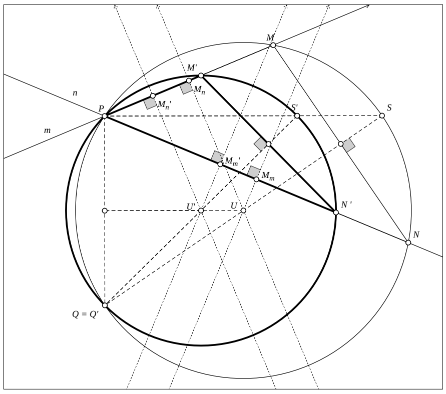


Das war zu zeigen.



Bemerkung: Alle Dreiecke NMQ sind ähnliche gleichschenklige Dreiecke.

Mit den Bezeichnungen und Argumenten des 2. Beweises können wir nachweisen, dass tatsächlich jede Gerade M_tN_t Tangente an eine Parabel mit Brennpunkt Q ist: Das Dreieck M_tQN_t ist stets gleichschenklig. Projiziert man die Punkte M_t und N_t senkrecht auf die Winkelhalbierende w_-, so bewegen sich die Projektionen mit gleicher Geschwindigkeit in entgegengesetzte Richtungen, d.h. die Mitte zwischen diesen beiden Punkten bleibt fest. Hieraus folgt, dass der Mittelpunkt der Strecke M_tN_t sich auf einer Geraden bewegt, die senkrecht auf w_- steht. Aus Symmetriegründen ist diese Gerade identisch mit der Geraden M_0N_0, dies ist die Scheiteltangente. Die zentrische Streckung (Q;2) führt diese Scheiteltangente in die Leitgerade über, dabei geht der Mittelpunkt der Strecke M_tN_t in den Punkt L_t auf der Leitgerade über und die Gerade M_tN_t ist Mittelsenkrechte auf der Strecke QL_t. Dies entspricht nun genau der bekannten Konstruktion der Tangente an eine Parabel. Den Berührpunkt selbst erhält man als Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten mit dem Lot auf die Leitgerade durch L_t.



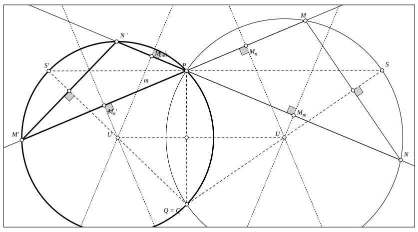
3. Beweis: Wir betrachten zwei Dreiecke PMN und $PM'N'$ vor dem Passieren der beiden Punkte durch P. Von den beiden Schnittpunkten des Umkreises mit der Mittelsenkrechten der Strecke MN sei derjenige, der in der gleichen Halbebene bez. $M'N'$ liegt, mit Q bezeichnet, der andere mit S (für ihn hat sich seit einiger Zeit der Begriff "Südpol bez. P im Dreieck PMN" eingebürgert, auch wenn unter "Pol" im Zusammenhang mit einem Dreieck etwas anderes verstanden wird), die Seitenmitten der Strecken PM und PN mit M_n bzw. M_m, und der Umkreismittelpunkt mit U. Die Bezeichnungen der entsprechenden Punkte im Dreieck $PM'N'$ seien S', Q', M_n' bzw. M_m' und U'.

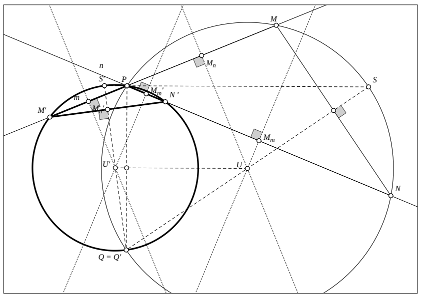
Die Strecke SQ ist Durchmesser des Umkreises von Dreieck PMN, also U gemeinsamer Mittelpunkt, und da Q und P Punkte dieses Umkreises sind, liegt U auf der Mittelsenkrechten der Strecke PQ, und diese Mittelsenkrechte ist parallel zu PS. Außerdem liegt S auf der Winkelhalbierenden w_π ("Südpolsatz").

Nach Voraussetzung bewegen sich die Punkte M und N mit gleicher Geschwindigkeit, d.h. die Strecken MM' und NN' sind gleich lang. Dann sind aber auch die Strecken M_nM_n' und M_mM_m' gleichlang. Also ist nicht nur $m_{PM} \parallel m_{PM'}$ und $m_{PN} \parallel m_{PN'}$, sondern diese beiden Paare paralleler Geraden haben den gleichen Abstand.

Nun ist die Winkelhalbierende w_π Symmetrieachse, bezüglich derer die Geraden m und n symmetrisch liegen. Also schneiden die eben erwähnten Paare paralleler Mittelsenkrechten die Gerade PS unter dem gleichen Winkel, schneiden also gleich lange Stücke aus. Dies gilt auch für die zu w_π parallele Mittelsenkrechte m_{PQ}. Also treffen sich nicht nur m_{PM} und m_{PN} auf m_{PQ}, sondern auch $m_{PM'}$ und $m_{PN'}$. Also liegt U' auf m_{PQ}, damit ist U' der Schnittpunkt der vier Mittelsenkrechten m_{PQ}, $m_{PM'}$, $m_{M'N'}$ und $m_{N'P}$. Der Umkreis von Dreieck PQM' enthält also N', und der Umkreis von Dreieck PQN' enthält geht auch M'.

Dies gilt dann auch für die Grenzlage, wenn der erste der beiden Punkte M' und N' den Punkt P erreicht.

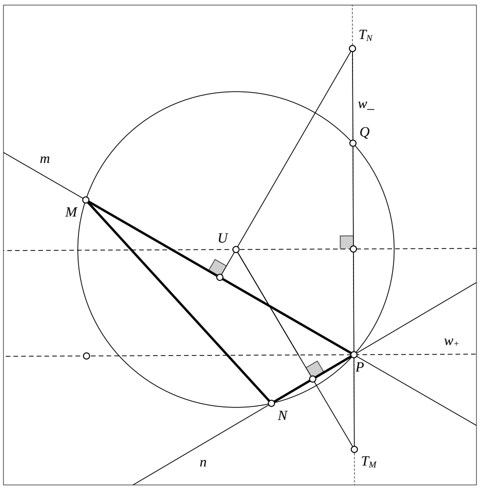




Nun betrachten wir die Situation, wenn von den beiden Punkten M und N der erste den Punkt Q erreicht und passiert hat; o.B.d.A. sei dies M'. Obige Argumentation behält ihre Gültigkeit, wenn man berücksichtigt, dass im Dreieck $PM'N'$ nun w_γ die Außenwinkelhalbierende ist, d.h. der Punkt Q ist nun "Südpol" im Dreieck $PM'N'$ bzgl. P.

Passiert nun auch N' den Punkt Q, ist w_γ wieder die Außenwinkelhalbierende im Dreieck $PM'N'$.

4. Beweis: (Variante des 3. Beweises, aber mit anderer Lagediskussion): Es gibt genau zwei von m und n verschiedene Symmetrieachsen durch den Punkt P, bezüglich derer die Geraden m und n symmetrisch liegen. Wir versehen die Punkte M und N mit einem Pfeil, der ihre Bewegungsrichtung entlang der Geraden m bzw. n anzeigt. Diesen Pfeil projizieren wir senkrecht auf diese beiden Symmetrieachsen. Dabei stellen wir fest, dass auf einer der beiden Symmetrieachsen die beiden Pfeile in die gleiche Richtung zeigen, und auf der anderen Symmetrieachse in entgegengesetzte Richtung, letztere bezeichnen wir mit w_-. Weil m und n nicht parallel sind, schneiden sich die Mittelsenkrechten auf PM und PN in einem Punkt U, dieser ist Mittelpunkt eines Kreises, der die Punkte P, M und N enthält. Die Schnittpunkte dieser Mittelsenkrechten mit der Symmetrieachse w_- seien T_N und T_M.



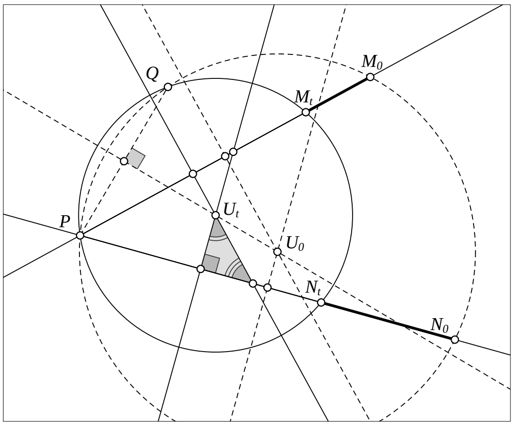
Weil w_+ Symmetrieachse ist, wird w_- von den oben genannten Mittelsenkrechten im gleichen Winkel geschnitten, d.h. das Dreieck T_NT_MU ist gleichschenklig mit Basis T_NT_M.

Wenn sich nun die Punkte M und N mit gleicher Geschwindigkeit auf m und n bewegen, dann bewegen sich die Mittelpunkte der Strecken PN und PM ebenfalls mit gleicher Geschwindigkeit, mit ihnen auch die Mittelsenkrechten und aus Symmetriegründen auch die Punkte T_M und T_N, und zwar letztere in entgegengesetzte Richtung, d.h. der Mittelpunkt der Strecke T_MT_N und damit die Mittelsenkrechte der Strecke T_MT_N bleiben fest. Da das Dreieck T_MT_NU gleichschenklig mit Basis T_MT_N ist, liegt U auf dieser Mittelsenkrechten.

Die Mittelsenkrechte auf T_MT_N ist also Symmetrieachse zu allen Kreisen um den beweglichen Punkt U; dies gilt insbesondere für diejenigen Kreise, die durch den festen Punkt P gehen. Dessen Spiegelbild ist ebenfalls fest, dies ist der gesuchte Punkt Q. Er fällt auch nicht mit P zusammen: Weil M und N den Punkt P zu verschiedenen Zeiten passieren, ist das Dreieck MNP nie gleichschenklig mit Symmetrieachse w_+, d.h. die Mittelsenkrechte von T_MT_N fällt nie mit w_+ zusammen und damit auch nicht P und Q.

Bemerkung zum 4. Beweis: Man kann auch die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten mit der anderen Symmetrieachse verwenden, Mit den Bezeichnungen w_+, S_M und S_N kann man dann analog argumentieren; allerdings bewegen sich die Punkte S_M und S_N in die gleiche Richtung, d.h. die Strecke S_MS_N hat stets gleiche Länge, das Dreieck S_MS_NU also stets die gleiche Form und insbesondere die gleiche Höhe von U. Damit bewegt sich U auf einer Parallelen zu w_+; dies ist die oben verwendete Mittelsenkrechte der Strecke T_MT_N. Im Wesentlichen hat man dann die Argumentation des 3. Beweises mit einer etwas einfacheren Figur.

5. Beweis: Schwächer als in der Aufgabenstellung setzen wir bezüglich der Geschwindigkeiten nur voraus, dass sich M mit konstanter Geschwindigkeit $v_1 > 0$ bewegt und N mit konstanter Geschwindigkeit $v_2 > 0$ Die Aussage der Aufgabe ist dann für $v_1 = v_2$ bewiesen.

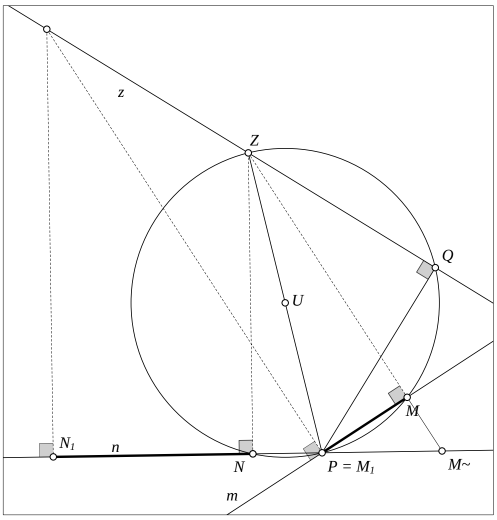


Seien M_0 und N_0 zwei Punkte, die von M und N gleichzeitig erreicht werden, bevor beide den Punkt P passieren, und M_t und N_t zwei Punkte, die von M und N zu einem anderen Zeitpunkt t gleichzeitig erreicht werden.

Es gibt dann eine reelle Zahl k, sodass zu jedem Zeitpunkt t stets $|M_0M_t| = k \cdot |N_0N_t|$ gilt und dabei M_t und N_t stets in der gleichen Halbebene bez. M_0N_0 liegen.

Sei U_t der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf PM_t und PN_t, damit ist U_t für jedes t der Mittelpunkt eines Kreises, der die Punkte M_t, N_t und P enthält. Sei weiter H_t der Mittelpunkt der Strecke PN_t, und G_t der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf PM_t mit der Geraden n (Die Bezeichnung wird in den endgültigen Lösungsbeispielen noch in der Figur nachgetragen.). Weil M und N den Punkt P zu verschiedenen Zeiten passieren, gilt stets $P \neq U_t$. Offensichtlich hat das Dreieck $H_tU_tG_t$ für alle t die gleichen Innenwinkel (außer wenn alle drei Punkte zusammenfallen). Bewegen sich nun M_t und N_t mit den konstanten Geschwindigkeiten v_1 bzw. v_2, so bewegt sich H_t mit der konstanten Geschwindigkeit $^1/_2 v_2$ und G_t mit einer konstanten Geschwindigkeit, die von v_1 und dem Schnittwinkel der Geraden abhängt und hier nicht berechnet werden muss. Für unsere Überlegung entscheidend ist, dass $|G_tH_t|$ für $v_1 \neq v_2$ proportional zu t größer (oder kleiner) wird, im Fall $v_1 = v_2$ bleibt sie gleich. Weil alle Dreiecke $H_tU_tG_t$ ähnlich sind (den Sonderfall $H_t = U_t = G_t$, erledigen wir mit einer Grenzwertbetrachtung) gilt dies dann auch für die Höhe H_tU_t dieses Dreiecks. Also bewegt sich der Punkt U_t auf einer Geraden. Diese Gerade ist dann Symmetrieachse zu jedem Kreis um U_t, insbesondere zu jedem Kreis um U_t, der durch den festen Punkt P und damit auch durch die Punkte M_t und N_t geht. Das Spiegelbild des festen Punktes P bezüglich dieser Geraden liegt ebenfalls auf diesem Kreis, es ist unser gesuchter Punkt Q. Der Punkt Q ist auch von P verschieden: Dies kann nur dann der Fall sein, wenn auch die Mitten der Strecken PM_t und PN_t zusammen fallen; dies kann aber nicht der Fall sein, da M und N den Punkt P zu verschiedenen Zeiten passieren.

6. Beweis (Variante des 5. Beweises, mit Verallgemeinerung): Schwächer als in der Aufgabenstellung setzen wir nur voraus, dass sich M mit konstanter Geschwindigkeit $v_1 > 0$ bewegt und N mit konstanter Geschwindigkeit $v_2 > 0$. Die Aussage der Aufgabe ist dann für $v_1 = v_2$ bewiesen.



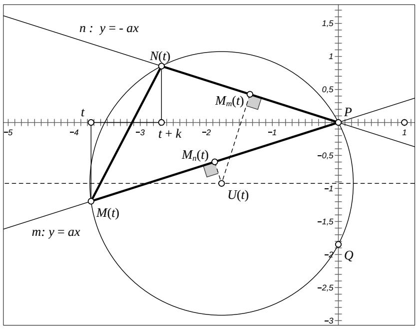
Sei Z der Schnittpunkt des Lotes auf m durch M und des Lotes auf n durch N. Da sich M und N jeweils mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, bewegt sich Z auf einer Geraden z (Begründung unten). Da M und N den Punkt P zu verschiedenen Zeiten passieren, ist Z immer verschieden von P, d.h. die Gerade z geht nicht durch P.

Den Fußpunkt des Lotes von P auf die Gerade z nennen wir Q, er erfüllt tatsächlich die Bedingungen der Aufgabe: Er ist fest bei der Bewegung von M und N; und weil bei N, M und Q ein rechter Winkel vorliegt, enthält der Thaleskreis über PZ die Punkte N, P, M und Q (und den Punkt Z auch noch); dies gilt bei jeder möglichen Lage von Z auf der Geraden z. Und da Q auf z liegt und z nicht durch P geht, ist sicher $P \neq Q$.

Begründung für die Existenz der Geraden z: Der Schnittpunkt $M\sim$ von MZ mit n bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf n, das Dreieck $M\sim NZ$ hat stets die gleichen Innenwinkel, der Punkt N bewegt sich mit (i.A. anderer) konstanter Geschwindigkeit und die orientierte Länge der Strecke NM nimmt mit konstanter Rate zu oder ab, und damit auch die Länge der Strecke NZ. (Die Geraden z können wir leicht konstruieren, indem wir diese Konstruktion für zwei

Punktpaare (M | N) zu verschiedenen Zeiten durchführen. Durch das Verhältnis von v_1 und v_2 ist die die Lage der beiden Paare auch festgelegt.

7. Beweis (Argumente wie im 2. Beweis, Nachweise mit Koordinatenrechnung): Wir legen die Figur so in ein Koordinatensystem, dass P auf den Ursprung zu liegen kommt und die Winkelhalbierende w_π des Dreiecks PMN auf die negative x–Achse; dabei sei die Lage der Punkte M und N zu einem Zeitpunkt t gewählt, zu dem noch keiner der beiden Punkte den Punkt P passiert hat. Da der Winkel zwischen der Winkelhalbierenden und den Geraden m bzw. n stets größer als 0° und kleiner als 90° ist, gibt es für jede mögliche Lage der Geraden m und n ein $a \neq 0$, für das die Geraden m und n die Graphen der Funktionen m : $y = ax$ bzw. n: $y = -ax$ sind.



Die Punkte M und N bewegen sich mit gleicher Geschwindigkeit auf M und N, gleiches gilt damit auch für die Mittelpunkte M_n und M_m der Strecken PM und PN, also wachsen auch deren x–Koordinaten mit gleicher Geschwindigkeit. Sei $M_n(t)$ und $M_m(t)$ die Lage der Punkte M_n und M_m zum Zeitpunkt t (auch nachdem M oder N den Punkt P passiert haben), dann können deren Koordinaten geschrieben werden als $M_n(\,t \mid at\,)$ und $M_m(\,t + k \mid -a(t + k)\,)$, wobei die konstante reelle Zahl k ($k \neq 0$) für die halbe Zeitdifferenz steht, mit der M und N den Punkt P passieren.

Sei $U(t)$ der Schnittpunkt der beiden Senkrechten auf m bzw. n durch $M_n(t)$ und $M_m(t)$. Er ist für jedes t und jedes $a > 0$ eindeutig definiert und Mittelpunkt eines Kreises, der die Punkte P, M und N enthält (die Vermeidung des Begriffs "Umkreis" vermeidet eine Sonderbehandlung der Fälle $M = P$ und $N = P$). Diese beiden Senkrechten haben die Funktionsgleichungen

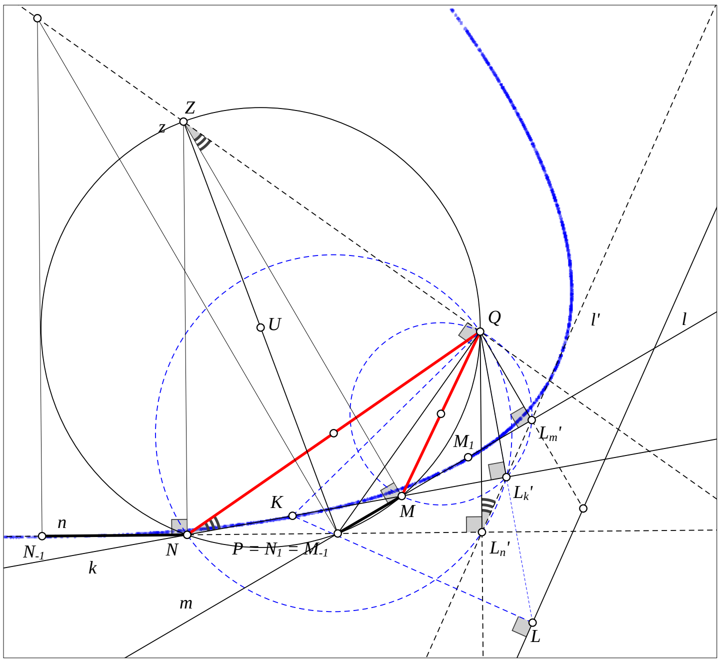
$$y = at + (-{}^1/_a)\cdot(x - t) \quad \text{und} \quad y = -at + ({}^1/_a)\cdot(x - (t + k)\,);$$

mit schulüblichen Methoden (wegen $a > 0$ sind alle Nenner von Null verschieden, man muss keine Sonderfälle beachten) erhält man für die Koordinaten von $U(t)$ nach hier nicht aufgeführter Rechnung

$$x_U(t) = (a + {}^1/_a)\cdot(t + k)\cdot a \quad \text{und} \quad y_U(t) = -(a + {}^1/_a)\cdot{}^k/_2 = const.$$

Damit liegt $U(t)$ für jedes t auf der Geraden $y = -(a + {}^1/_a)\cdot{}^k/_2$; diese Gerade ist damit Symmetrieachse bezüglich derer jeder der so konstruierten Kreise durch P, $M(t)$ und $N(t)$ symmetrisch ist. Also ist das Spiegelbild des festen Punktes $P(0|0)$ ebenfalls fest und liegt auf diesem Kreis, dies ist der gesuchte Punkt $Q(0| -(a + {}^1/_a)\cdot k)$; und da $k \neq 0$ und $-(a + {}^1/_a) \neq 0$, sind Q und P verschiedene Punkte.

Bemerkung: Dass man in der Argumentation a durch ${}^1/_a$ ersetzen kann, konnte vor der Rechnung erwartet werden: Dies entspricht einem Vertauschen der Bezeichnungen von x–Achse und y–Achse.



Ergänzung zum 6. Beweis: Dass die Hüllkurve der Geraden MN eine Parabel ist, wird gelegentlich spielerisch an einem Nagelbrett simuliert: Auf den Geraden m und n werden beginnend im Schnittpunkt P in gleichen Abständen Nägel M_0, M_1, M_2, ... sowie N_0, N_1, N_2, ... eingeschlagen und Fäden M_tN_0, $M_{t-1}N_1$, M_{t-2},N_2, ... usw. gezogen. Die Hüllkurve der Fäden ist dann eine Parabel. In speziellen Lagen findet man einen Nachweis unter [1]. Für allgemeine Lagen kann unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse folgendes gezeigt werden:

Satz: Es gibt – auch wenn sich M und N mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen – eine Parabel mit Brennpunkt Q, zu der jede der Geraden MN Tangente ist; dabei sind zwei besondere Berührpunkte die Punkte, auf denen M bzw. N liegt, wenn der jeweils andere Punkt auf P liegt.

Beweis (ohne ausführlichere Lagediskussion, diese sei den Lesenden überlassen): Die Gerade MN sei mit k bezeichnet, die Lotfußpunkte der Lote von Q auf die Geraden k, m, n mit L_k', L_m', L_n'. Der Thaleskreis über der Strecke NQ enthält die Punkte N, L_n', und L_k', die Gerade l enthält die Punkte L_k', M und N, also gilt nach Umfangswinkelsatz $\angle L_k'L_n',Q = \angle L_k'NQ = \angle MNQ = \angle MZQ = const$. Also bewegt sich der Punkt L_k' auf einer Geraden l'. (Dies ist die grundlegende Idee für einen Beweis für den Satz von Wallace–Simson: Ein Punkt Q liegt genau dann auf dem Umkreis eines Dreiecks, wenn die Lotfußpunkte der drei Lote auf die Seiten des Dreiecks auf einer Geraden liegen.)

Die zentrische Streckung $S(Q;2)$ bilde L_k' auf L (= Leitgerade der Parabel) und l' auf l ab, und das Lot auf l durch L schneide k in K. Nach bekannter Konstruktion ist nun K ein Punkt der Parabel mit Brennpunkt Q und Leitgerade l; dabei ist die Gerade k eine Tangente. (Anders als die Figur vermuten lässt, ist die Gerade z im Allgemeinen nicht die Symmetieachse der Parabel.) Es gilt also:

Satz: Die drei Schnittpunkte dreier Tangenten an eine Parabel und ihr Brennpunkt bilden eine Sehnenviereck [2].

Dass die Hüllkurve der Geraden MN eine Parabel ist, wird gelegentlich spielerisch an einem Nagelbrett simuliert: Auf den Geraden m und n werden beginnend im Schnittpunkt P in gleichen Abständen Nägel M_0, M_1, M_2, ... sowie N_0, N_1, N_2, ... eingeschlagen und Fäden M_tN_0, $M_{t-1}N_1$, M_{t-2},N_2, ... usw. gezogen. Die Hüllkurve der Fäden ist dann eine Parabel.[1]

Literatur:
[1] z.B. https://mathematik.bildung-rp.de/fileadmin/user_upload/mathematik.bildung-rp.de/Sekundarstufe_II/MatheAG-SII/pdf/Fadenbilder.pdf, oder
https://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/I/Inparabeln/Inparabeln.htm
[2] HONSBERGER, ROSS: Episodes in Nineteenth and Twentieth Euclidean Geometry,
ISBN 0-88385-639-5,p. 47
weitere Stichwörter zur Suche im Internet: quadratische Bézierkurve, Kiepert–Parabel(n), ...

Aufgabe 4: In jedem Feld einer Tabelle mit m Zeilen und n Spalten, wobei $m < n$ ist, steht eine nicht-negative reelle Zahl; dabei kommt in jeder Spalte mindestens eine positive Zahl vor.

Beweise: Es gibt ein Feld mit einer positiven Zahl derart, dass die Summe der Zahlen in der Zeile dieses Feldes größer ist als die Summe der Zahlen in der Spalte dieses Feldes.

Bezeichnungen: Eine Tabelle T, die die Voraussetzungen der Aufgabe erfüllt, nennen wir *zulässig*.

Das Feld in der i–ten Zeile und j–ten Spalte sei mit $(i|j)$ bezeichnet, die Zahl darin mit $a(i|j)$, die Summen der Zahlen in Zeile i bzw. Spalte j ($1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$) mit Z_i bzw. S_j.

Eine rechteckige Teiltabelle mit gegenüberliegenden Eckfeldern $(a|b)$ und $(c|d)$ sei mit *Rechteck* $[(a|b) \ldots (c|d)]$ bezeichnet.

1. Beweis: Für alle $(i|j)$ mit $a(i|j) > 0$ ist stets $Z_i > 0$ und $S_j > 0$, also sind die Ausdrücke $\frac{a(i|j)}{Z_i}$ und $\frac{a(i|j)}{S_j}$ definiert und positiv. Also gilt

$$\sum_{a(i|j)>0} \frac{a(i|j)}{Z_i} = \sum_{1\le i\le m} \left(\sum_{a(i|j)>0} \frac{a(i|j)}{Z_i} \right) \le \sum_{1\le i\le m} 1 = m,$$

$$\sum_{a(i|j)>0} \frac{a(i|j)}{S_j} = \sum_{1\le j\le n} \left(\sum_{a(i|j)>0} \frac{a(i|j)}{S_j} \right) = \sum_{1\le j\le n} 1 = n.$$

Also ist $0 > m - n \ge \sum_{a(i|j)>0} \left(\frac{a(i|j)}{Z_i} - \frac{a(i|j)}{S_j} \right)$. In dieser Summe ist also mindestens ein Summand negativ, d.h. es gibt ein Paar $(i|j)$ mit $a(i|j) > 0$ und $\frac{a(i|j)}{Z_i} < \frac{a(i|j)}{S_i}$, also $Z_i > S_j$.

2. Beweis: Vertauscht man zwei Zeilen einer zulässigen Tabelle, so bleiben die Spaltensummen gleich, ebenso die Zeilensummen, gleiches gilt beim Vertauschen zweier Spalten. Also gehörten zu jedem Feld der Tabelle vor und nach dem Vertauschen die gleichen Werte Z_i und S_j. Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass Zeilen von oben nach den Werten von Z_i und die Spalten von links nach den Werten von S_j aufsteigend sortiert sind, d.h. dass $Z_{i+1} \ge Z_i$ und $S_{j+1} \ge S_j$ für alle $1 \le i < m$, $1 \le j < n$.

Wenn für ein Feld $(i|j)$ die Ungleichung $Z_i > S_j$ gilt, färben wir es rot (unabhängig davon, ob es einen positiven Eintrag hat oder nicht), und wenn $Z_i \le S_j$ bzw. äquivalent $Z_i - S_j \le 0$ gilt, färben wir es grün. Nach einer solche Sortierung gilt:

$(i|j)$ rot $\Rightarrow Z_{i+r} \ge Z_i > S_j$ und $S_{j-s} \le S_j < Z_i$, für alle $r,s \ge 0$, $i + r \le m$, $j - s \ge 1$;

also gilt $(i|j)$ rot $\Rightarrow$ alle Felder im Rechteck $[(i|1) \ldots (m|j)]$ sind ebenfalls rot. (*).

(Anschaulich: alle Felder, die nicht weiter rechts und nicht weiter oben sind als das Feld $(i|j)$.)

Wir zeigen nun mit Widerspruchsbeweis, dass es mindestens ein rotes Feld mit Eintrag gibt.

Annahme: Alle roten Felder sind leer.

Dann wären alle Felder $(1|1)$, $(2|2)$, ... , $(m|m)$ grün (**), was wir mit "endlicher vollständigen Induktion" für $t = 1, 2, \ldots, m$ zeigen:

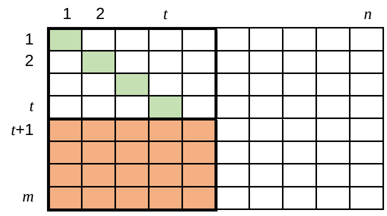
Zunächst erinnern wir uns, dass $n > m$, demnach ist die Existenz dieser Felder gesichert.

Ind'Anf: Das Feld (1|1) ist grün. Wäre es rot, wären nach (*) auch alle anderen Felder der 1. Spalte rot. Nach Widerspruchsannahme gäbe es also in Spalte 1 keinen Eintrag; dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung in der Aufgabenstellung.

Ind'Ann': Für ein t mit $1 \le t < m$ seien alle Felder (1|1), (2|2), ... , (t|t) grün. (***).

Ind'Beh': Dann ist das Feld (t + 1|t + 1) ebenfalls grün:

Ind'Schl': Wäre es nämlich rot (vgl. Abb.), wären nach (*) auch alle Felder im Rechteck [(t + 1|1) ... (m | t + 1)] rot und damit leer, sie spielten also bei der Berechnung von S_1 bis S_{t+1} keine Rolle. Also gälte:



$$
\begin{aligned}
S_1 + S_2 + ... + S_{t+1} &= \text{Summe aller Einträge im Rechteck } [(1|1) ... (m|t+1)] \\
&= \text{Summe aller Einträge im Rechteck } [(1|1) ... (t|t+1)] \\
&\le \text{Summe aller Einträge im Rechteck } [(1|1) ... (t|n)] \\
&= Z_1 + Z_2 + ... Z_t \quad \le^{(***)} \quad S_1 + S_2 + ... + S_t,
\end{aligned}
$$

was aber wegen $S_{t+1} > 0$ nicht sein kann.

Es gilt also $Z_t \le S_t$ für alle 1, 2, ... , m. Da es nach Voraussetzung in jeder Spalte einen Eintrag gibt, ist $S_j > 0$ für alle j; damit erhalten wir folgenden Widerspruch

Summe aller Einträge = $Z_1 + Z_2 + ... Z_m \le S_1 + S_2 + ... + S_m < S_1 + S_2 + ... + S_n$ = Summe aller Einträge.

3. Beweis (vollständige Induktion nach m, gemischt mit Widerspruchsbeweis):

Ind.'Anf': Für $m = 1$ ist die Aussage richtig, denn in einer zulässigen 1xn–Tabelle hat z.B. das Feld (1|1) die gewünschte Eigenschaft: Es ist nämlich $a(1|j) > 0$ für alle $1 \le j \le n$, weil die Zahlen $a(i|j)$ die einzigen in ihrer Spalte sind und damit positiv, ferner ist $n > m = 1$ und damit gilt

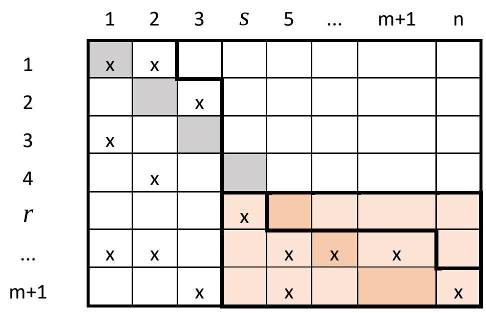
$$Z_1 = \sum_{1 \le j \le n} a(1|j) > a(1|1) = S_1.$$

Ind'Ann': Für ein bestimmtes $m \ge 1$ sei für alle 1, 2, ... , m die Aussage richtig.

Ind'Beh': Dann gilt die Aussage auch für m + 1 und $n > m + 1$.

Ind'schl': Wir betrachten eine zulässige Tabelle T mit m + 1 Zeilen und $n > m + 1$ Spalten. Vertauscht man in ihr zwei Zeilen, so bleiben die Spalten– und Zeilensummen gleich, gleiches gilt beim Vertauschen zweier Spalten. Also gehören zu jedem Feld der Tabelle vor und nach dem Vertauschen die gleichen Werte Z_i und S_j. Wir können also in T folgendermaßen umsortieren ohne dass sich die Aussage der Aufgabe ändert:

Zuerst sortieren wir die Zeilen nach den Werten ihrer Zeilensummen absteigend von oben, d.h. es ist $Z_i \ge Z_k \Leftrightarrow i \le k$. Dann hat das Feld (1|1) einen positiven Eintrag, weil evtl. leere Zeilen sich am unteren Ende der Tabelle befinden. Danach sortieren wir die Spalten nach Index derjenigen Zeile aufsteigend von links, in der der oberste positive Eintrag zu finden ist. Falls einige dieser Zeilen– oder Spaltensummen gleich sind, ist die Reihenfolge dieser Summen bzw. Spalten untereinander egal. Wenn nicht alle Felder der Zeile 1 einen positiven Eintrag haben, gibt es eine "Treppenlinie" (vgl. Figur; "x" steht für einen positiven Eintrag) beginnend am oberen Rand (frühestens nach der 1. Spalte) und endend am rechten Rand (spätestens oberhalb der letzten Zeile) derart, dass im Bereich oberhalb und rechts davon kein Feld eine positven Eintrag hat und in jedem Feld direkt unterhalb jeder waagrechten Linie ein positiver Eintrag ist.



Wir färben das Feld ($i|j$) genau dann grün, wenn $Z_i \leq S_j$ gilt, unabhängig davon, ob es einen positiven Eintrag besitzt oder nicht. Nach obiger Sortierung und Färbung hat die Tabelle T folgende Eigenschaften:

Falls ein Feld ($i|j$) grün ist, dann auch alle Felder, die in der gleichen Spalte unterhalb von ($i|j$) liegen. Formal: Wenn für das Feld ($i|j$) die Ungleichung $Z_i \leq S_j$ gilt, dann gilt auch $Z_{i+r} \leq Z_i \leq S_j$ für alle $r \geq 0$ mit $i + r \leq m + 1$. (*)

Ist der oberste positive Eintrag in der Spalte l im Feld ($k|l$) mit $2 \leq k \leq m+1$, so enthält die Teiltabelle bestehend aus den Feldern ($i|j$) mit $i \leq k - 1$ und $j \geq l$ keinen positiven Eintrag. (Anschaulich: Dies sind die Felder, die höher und nicht weiter links als das Feld ($i|j$) liegen.) (**)

Nun nehmen wir an, dass die Induktionsbehauptung falsch ist, d.h. dass alle positiven Einträge in grünen Feldern sind und betrachten, wo in den Spalten 1 bis $m + 1$ die Felder mit oberstem positiven Eintrag relativ zu den Feldern der Hautdiagonalen, d.h. den Feldern (1|1), (2|2), ... , ($m + 1|m + 1$) liegen. Es gibt zwei Fälle, beide führen wir zum Widerspruch:

Fall1: In jeder Spalte j mit $1 \leq j \leq m + 1$ liegt der oberste poitive Eintrag auf oder oberhalb der Diagonalen. Nach Widerspruchsannahme sind insbesondere die obersten Felder mit positiven Einträgen grün und nach (*) auch alle Felder unterhalb, also sind insbesondere auch die Felder auf der Hauptdiagonalen grün. Für jedes Feld ($i|i$) mit $1 \leq i \leq m + 1$ gilt also $Z_i \leq S_i$, dies summieren wir auf und erhalten so – weil alle $S_j > 0$ sind und $n > m +1$ gilt – den Widerspruch

$$\text{Summe aller Einträge} = \sum_{1\leq j\leq n} S_j = \sum_{1\leq i\leq m+1} Z_i \leq \sum_{1\leq i\leq m+1} S_i < \sum_{1\leq i\leq m+1} S_i + S_n \leq \text{Summe aller Einträge.}$$

Fall 2: Nicht Fall 1, d.h. es gibt mindestens eine Spalte mit Index s, deren oberstes Feld mit positivem Eintrag unterhalb der Hauptdiagonalen liegt, also in einem Feld ($r|s$) mit $r > s > 0$. Dabei ist $s \geq 2$, weil nach dem beschriebenen Umsortieren das Feld (1|1) einen positiven Eintrag hat, und $s \leq m$, weil es in der Spalte $m + 1$ kein Feld unterhalb der Hauptdiagonalen gibt.

Nun betrachten wir die Teiltabelle T' bestehend aus den Feldern $a(i|j)$ mit $i \geq r$ und $j \geq s$ (in der Figur orange); ihre Zeilen– und Spaltensummen bezeichnen wir mit Z'_i und S'_j, dabei verwenden wir die gleichen Indices wie in T. Weil es nach (**) oberhalb von T' in T keine positiven Einträge gibt, ist jeder positive Eintrag von T auch in T'. Also ist stets $S'_j = S_j$, ferner gilt stets $Z'_i \leq Z_i$. (***).

Da $r > s$, gilt $m - r < n + 1 - s$, hieraus lesen wir ab, dass die Tabelle T' weniger Zeilen als Spalten hat und dass die Anzahl der Zeilen kleiner als m ist. Also ist T' zulässig und es kann auch die Induktionsannahme verwendet werden, d.h. es gibt ein Paar ($i|j$), für das $a(i|j) > 0$ und $Z'_i > S'_j$. Nach (***) gilt also $Z_i \geq Z'_i > S_{j'} = S_j$; damit ist ($i|j$) auch in der Tabelle T nicht in einem grünen Feld im Widerspruch zur Annahme.

Damit ist alles gezeigt.