

Aufgabenblatt 2. Runde 2018

Wichtiger Hinweis

Die Aufgaben der 2. Runde werden bereits vor dem Einsendeschluss, dem **1. September 2018**, auf unserer Webseite veröffentlicht. Dies bedeutet aber nicht, dass sie schon vor diesem Zeitpunkt frei verwendet werden dürfen, da für die Teilnahmeberechtigten an der 2. Runde die strikte Verpflichtung zu selbstständiger Bearbeitung der Aufgaben besteht. Ebenso sind Diskussionen über die aktuellen Aufgaben und mögliche Lösungsideen, insbesondere auch in Internetforen, nicht zulässig. Sollten Sie auf derartige Beiträge in einem Forum o.ä. stoßen, sind wir für einen entsprechenden Hinweis an den Betreiber dieses Forums und auch an uns sehr dankbar. Für Ihre Unterstützung bedanken wir uns schon jetzt, denn sie hilft uns dabei, möglichst gleiche Teilnahmebedingungen für alle Teilnahmeberechtigten sicherzustellen.

» BILDUNG & BEGABUNG GEMEINNÜTZIGE GMBH

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: +49 228 959 15-0
Fax: +49 228 959 15-19 | info@bildung-und-begabung.de | www.bildung-und-begabung.de
Bankverbindung: Sparkasse KölnBonn | IBAN: DE27 3705 0198 0029 0022 50 | BIC: COLSDE33XXX
Registergericht: Amtsgericht Essen, HRB 22445 | St.-Nr.: 206/5887/1089 | USt.-IDNr.: DE217481695
Geschäftsführung: Dr. Elke Völmicke, Prof. Dr. Andreas Schlüter

Das bundesweite Talentförderzentrum Bildung & Begabung ist eine Tochter des Stifterverbandes.
Förderer sind das Bundesministerium für Bildung und Forschung und die Kultusministerkonferenz. Schirmherr ist der Bundespräsident.

Die Aufgaben der 2. Runde 2018

Aufgabe 1

Anja und Bernd nehmen abwechselnd Steine von einem Haufen mit anfangs n Steinen ($n \geq 2$). Anja beginnt und nimmt in ihrem ersten Zug wenigstens einen, aber nicht alle Steine weg. Danach nimmt, wer am Zug ist, mindestens einen, aber höchstens so viele Steine weg, wie im unmittelbar vorhergehenden Zug weggenommen wurden. Wer den letzten Stein wegnimmt, gewinnt.

Bei welchen Werten von n kann Anja den Gewinn erzwingen, bei welchen kann es Bernd?

Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Aufgabe 2

Wir betrachten alle reellen Funktionen f mit der Eigenschaft $f(1-f(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

a) Weise die Existenz einer solchen Funktion durch Angabe eines konkreten Beispiels nach.

b) Wir definieren für jede solche Funktion f die Summe

$$S_f = f(-2017) + f(-2016) + \dots + f(-1) + f(0) + f(1) + \dots + f(2017) + f(2018).$$

Bestimme die Menge aller Werte, die derartige Summen S_f annehmen können.

Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Aufgabe 3

Gegeben sind eine Strecke AB und auf ihr ein Punkt T , wobei T näher an B liegt als an A .

Zeige, dass es zu jedem von T verschiedenen Punkt C auf der Senkrechten zur Strecke AB durch T jeweils genau einen Punkt D auf der Strecke AC mit $\angle CBD = \angle BAC$ gibt und dass dann das Lot zu AC durch D stets durch ein und denselben, von der Wahl von C unabhängigen Punkt E auf der Geraden AB geht.

Aufgabe 4

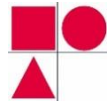
Bestimme alle natürlichen Zahlen n mit $n > 1$, für die gilt:

Färbt man jeden Gitterpunkt eines quadratischen Gitters in der Ebene mit je einer von n vorgegebenen Farben, dann gibt es immer drei Gitterpunkte gleicher Farbe, die ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck bilden, dessen Katheten parallel zu den Gitterlinien sind.

Erläuterung: Die Gitterpunkte eines quadratischen Gitters sind diejenigen Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem (d.h. einem Koordinatensystem, bei dem die Achsen senkrecht aufeinander stehen und bei dem die Längeneinheiten auf beiden Achsen gleich sind), bei denen beide Koordinaten ganzzahlig sind. Gitterlinien sind die Geraden, die durch Gitterpunkte gehen und parallel zu einer der beiden Achsen sind.

Bitte die Teilnahmebedingungen und wichtigen Hinweise auf der Rückseite beachten!

Teilnahmebedingungen und wichtige Hinweise



- Zur zweiten Runde sind Arbeiten zugelassen, die Lösungen zu *mindestens drei* der vier Aufgaben enthalten. Die Bearbeitungen sollen in der gleichen Form wie in der ersten Runde (also insbesondere Format DIN A4 im DIN C4-Umschlag, 6 cm breiter unbeschriebener Rand, Blätter fortlaufend durchnummeriert, Name oben rechts auf jedem Blatt) eingereicht werden. Achten Sie bitte auf gute Lesbarkeit. Ihre Arbeit sollte maschinengeschrieben sein.
- Bitte kleben Sie den beiliegenden *Adresscoupon* oben links auf die Rückseite des Umschlags, den *Teilnahmecoupon* legen Sie bitte ausgefüllt in den Umschlag. Die auf diesem Coupon abgedruckte *Selbstständigkeitserklärung* muss von Ihnen unterschrieben sein. Die Verpflichtung zur Selbstständigkeit gilt in der zweiten Runde für alle Teilnehmenden ausnahmslos. Nicht erst bei der Ausformulierung der Lösungen, sondern auch schon bei der Lösungsfindung ist eine Diskussion über mögliche Lösungswege oder eine Zusammenarbeit mit anderen Personen nicht gestattet. Ein begründeter Verdacht auf Verstoß gegen die Selbstständigkeitsverpflichtung führt zum Ausschluss vom Wettbewerb.
- Das erste Blatt der Arbeit soll die Angabe der von Ihnen benutzten Hilfsmittel (Literatur, IMO–Training etc.) enthalten. Allerdings ersetzt bei der Verwendung von Formeln bzw. Sätzen, die im Schulbereich nicht geläufig sind, eine solche Erwähnung einen Nachweis nicht.
- Beachten Sie bei der Anfertigung der Endfassung, dass die Beurteilung der Arbeit durch die Korrekturkommission in der zweiten Runde besonders streng ist; neben der mathematischen Richtigkeit und Vollständigkeit spielen auch Klarheit, Verständlichkeit und Schlüssigkeit der Darstellung bei der Bewertung eine wichtige Rolle. Eine glatte Korrektur der Arbeit soll ohne Anfertigung zusätzlicher Skizzen und ohne Ergänzen von Umformungsschritten möglich sein.
- Gegen die Verwendung eines Computers oder eines Taschenrechners als Hilfsmittel zur Ideenfindung bzw. Rechnungskontrolle ist nichts einzuwenden, doch müssen die für den jeweiligen Nachweis wesentlichen Schritte und Resultate ohne diese Hilfsmittel nachvollziehbar und überprüfbar sein.
- Die Aufgabenstellungen sind während der Bearbeitungszeit als vertraulich zu behandeln. **Vor dem 1. September 2018 ist also eine Weitergabe, z. B. über elektronische Medien, nicht zulässig.**

Einsendeschluss: **1. September 2018**
(Datum des Poststempels)

Senden Sie Ihre Bearbeitungen bitte ausreichend frankiert an:

Bundeswettbewerb Mathematik
Bildung & Begabung gemeinnützige GmbH
Kortrijker Str. 1
53177 Bonn

Telefon: 0228 – 9 59 15–20 • E-Mail: info@bundeswettbewerb-mathematik.de
Web: www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Wichtiger Hinweis: Die Teilnehmerarbeiten müssen nicht nur fristgerecht abgeschickt werden, sondern auch spätestens **5 Tage nach Einsendeschluss** in der Geschäftsstelle des Wettbewerbs eingegangen sein. Dann beginnt das Korrekturverfahren, in das nachträglich leider keine Arbeiten mehr einbezogen werden können.

Die Korrekturzeit beträgt ca. zwei Monate, so dass die Benachrichtigungen über das Ergebnis in der ersten Novemberhälfte 2018 versandt werden.