Eschertricks für simultane Zerlegungen

Frank Göring,*

18. Oktober 2016

Zusammenfassung

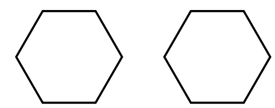
Im Buch [2] „Bundeswettbewerb Mathematik – Die schönsten Aufgaben“ auf Seite 113-117 wird die dritte Aufgabe der ersten Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik 2004 (BWM2004_1_3) diskutiert. Sie ist eine von vielen Zerlegungsaufgaben. Die auf Seite 116 gestellte Fragestellung wird hier zum Anlass genommen, zu diskutieren, wie man aus gegebenen simultanen Zerlegungen weitere herleiten kann. Die Grundidee dieses Textes rührt von den berühmten regelmäßigen Parkettierungen[4] des niederländischen Grafikers M.C.Escher[3] her. Ein Weg, symmetrische Parkettierungen mit unregelmäßigen Parkettsteinen zu erzeugen, wird hier illustriert. Dann werden Parkettierungen mit gleicher Symmetrie genutzt, um simultane Zerlegungen ihrer Parkettsteine zu erhalten. Die sich hier ergebende Idee wird dann weiter ausgebaut um auf drei verschiedene Arten und Weisen simultane Zerlegungen abwandeln zu können. Dies alles geschieht am Beispiel der anfangs genannten Aufgabe BWM2004_1_3.

*Fakultät für Mathematik, Technische Universität Chemnitz, D-09107 Chemnitz, Germany. frank.goering@mathematik.tu-chemnitz.de

1 Einleitung

In der ersten Stufe des Bundeswettbewerbs Mathematik 2004 lautete die dritte Aufgabe[1]:

> Man beweise, dass die beiden abgebildeten kongruenten regelmäßigen Sechsecke so in insgesamt sechs Teile zerschnitten werden können, dass diese Teile sich lückenlos und überschneidungsfrei zu einem gleichseitigen Dreieck zusammensetzen lassen[1].



Im Buch [2] wird diese auf den Seiten 113 bis 117 von Cornelia Wissemann-Hartmann diskutiert . Auf Seite 116 wird nach neuen Zerlegungen gefragt. Die folgenden Kapitel widmen sich der Frage: Wie kann man aus den im Text gegebenen Zerlegungsideen neue Zerlegungen konstruieren?

Die vorliegenden Überlegungen basieren auf Ideen des für seine Parketierungen der Ebene mit verschiedensten Figuren berühmten Grafikers M.C.Escher.

Referenzen zu Bildern (etwa Bild 5) beziehen sich immer auf das entsprechende Bild im Buch [2].

Ein entsprechendes (aber anders gestaltetes) Bild ist stets auch in diesem Text angegeben. Bilder, zu denen herunterladbare Geogebra-Dateien existieren, welche die illustrierten Zerlegungsideen teilweise interaktiv nachstellen sind nach den entsprechenden Geogebra-Dateien benannt.

[1] Wir bezeichnen im Kommentar Punktmengen mit Kleinbuchstaben, da sie als Elemente von Mengen und als Argumente von Funktionen verwendet werden. Großbuchstaben bezeichnen hier Mengen von Punktmengen, insbesondere solche, die als Zerlegung einer Punktmenge dienen (welche dann mit dem zugehörigen Kleinbuchstaben bezeichnet ist). Die vorkommenden Funktionen sind Kongruenzabbildungen und werden mit ϕ (mit Index) oder mit ψ (ohne Index) bezeichnet.

Eine Möglichkeit der Formalisierung der Aufgabe wäre folgende:

Definition 1. *Eine* simultante Zerlegung *von Flächen x und y sei eine Paar (X, Y) von Mengen X und Y jeweils im Inneren disjunkter Teile derart, dass es zu jedem Teil $t \in X$ eine Kongruenzabbildung ϕ_t derart gibt, dass $\phi_t(t) \in Y$ und dass die Abbildung $X \to Y : t \mapsto \phi_t(t)$ eine Bijektion zwischen X und Y ist, sofern für die Vereinigungen aller Teile in X bzw. in Y gilt $x = \bigcup_{t\in X} t$ und $y = \bigcup_{t\in Y} t$.*

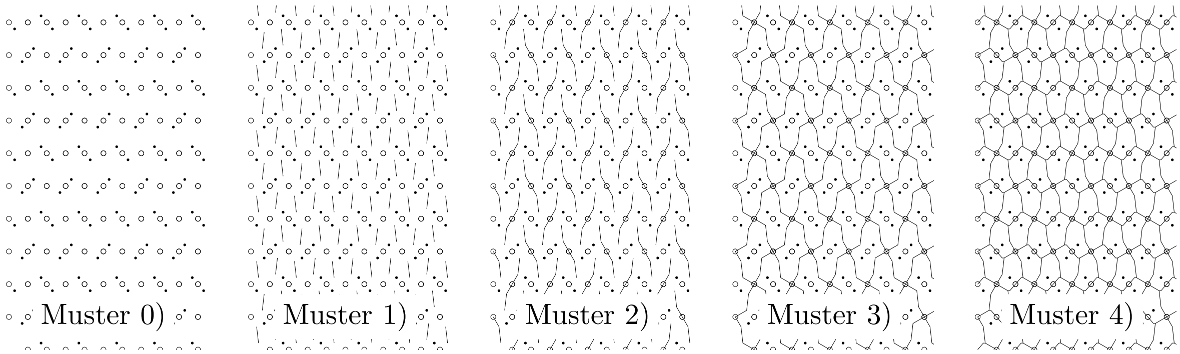
Aus der Begriffsbildung ist insbesondere ersichtlich, dass die Lage von Komponenten von x und Komponenten von y zueinander für die Existenz von simultanen Zerlegungen völlig irrelevant ist. Die beiden Sechsecke werden daher im Folgenden oft als benachbart dargestellt.

Anzumerken ist, dass in dieser Begriffsbildung die Frage der Zugehörigkeit von Randpunkten zu einem Teil nicht festgelegt wird. Nimmt man zu allen Teilen alle Randpunkte hinzu, bleibt eine simultane Zerlegung trotzdem eine simultane Zerlegung, sodass die Randpunktfrage letztlich nicht von großer Bedeutung ist.

Da bei dieser Aufgabe Kongruenztransformationen der Ebene ε eine Rolle spielen, hier einige formale Eigenschaften: Ist $\phi : \varepsilon \to \varepsilon, x \mapsto \phi(x)$ eine Kongruenztransformation und $t \subseteq \varepsilon$, so verstehen wir unter $\phi(t)$ die Menge $\{\phi(P)|P \in t\}$ aller transformierten Punkte. Zu diesem ϕ gibt es auch eine Kongruenztransformation $\phi^{-1} : E \to E, x \mapsto \phi^{-1}(x)$, die diese rückgängig macht. Es ist also die Nacheinanderausführung von ϕ und ϕ^{-1} definiert durch $\phi^{-1} \circ \phi : E \to E, x \mapsto \phi^{-1}(\phi(x))$ die Identität – ebenso wie $\phi \circ \phi^{-1}$. Grund ist, dass Kongruenztransformationen bijektiv sind.

Weiter ist die Nacheinanderausführung von zwei Kongruenztransformationen stets eine Kongruenztransformation.

2 Parkettieren der Ebene mit gegebenen Symmetrien



Zeichnungen wie die berühmten Parkettierungen von M.C.Escher erhält man zu einer gegebenen Symmetriegruppe[2], wenn man mit jedem Bildelement auch alle durch die Symmetrie erzeugten Bilder des Bildelements einzeichnet.

Will man asymmetrische Parkettsteine, so liegen insbesondere Drehzentren stets auf dem Rand eines Parkettsteines.

Soll eine Parkettierung etwa durch zwei Schubspiegelungen erzeugt werden, von denen eine in Richtung der Mittellinie eines gleichseitigen Dreiecks verschiebt und auch daran spiegelt, und die andere sich entsprechend zur Höhe des gleichseitigen Dreiecks verhält, so ergibt sich als Startsituation das im Bild „Muster 0)“ dargestellte Gitter aus Spiegelsymmetriezentren (Mitten der Kreislinien). Um die Wirkung der Symmetriegruppe zu illustrieren, ist ein „zufälliger“ Punkt mit all seinen Bildern eingezeichnet.

Zeichnet man hier etwa irgendeine kurze Strecke ein ergibt sich mit ihren Bildern unter Schubspiegelung das Muster 1). Soll die Linie Rand unseres Parkettsteines werden, ist es sinnvoll, die mit einem Symmetriezentrum zu verbinden – siehe Muster 2). Noch ist die Ebene durch die Linie gar nicht zerteilt. Wir verbinden unsere Linie also noch mit einem anderen Bild dieses Symmetriezentrums und die Ebene wird wie in Muster 3) in Teile zerlegt. Dieses Muster wird von allen von uns vorgegebenen Symmetrien auf sich selbst abgebildet. Da jeder Parkettstein aber noch ein Symmetriezentrum enthält (und zwei Bilder unseres „zufälligen“

[2] Betrachtet wird eine Menge M von Kongruenztransformationen. Wir definieren rekursiv die aus M erzeugten Kongruenztransformationen:

Definition 2. *Eine Kongruenztransformation ϕ heißt* aus M erzeugt*, wenn sie durch endlich viele Schritte folgender Art aus der Identität hervorgeht:*

1. *Bildung der Umkehrabbildung der bisher erzeugten Abbildung oder*
2. *Nacheinanderausführung der bisher erzeugten Abbildung und einer Abbildung aus M.*

Die aus M erzeugten Kongruenztransformationen sind bzgl. Umkehrung und Nacheinanderausführung abgeschlossen, bilden daher algebraisch stets eine Gruppe bzgl. der Nacheinanderausführung. Wenn diese Gruppe diskret ist und insbesondere zwei Verschiebungen in unterschiedliche Richtungen enthält, dann ist sie als Symmetriegruppe einer regelmäßigen Zerlegung Z der Ebene in kongruente Parkettsteine geeignet. Genauer definieren wir:

Definition 3. *Sei Z eine Zerlegung der Ebene in kongruente Teilflächen (Parkettsteine) und z ein Parkettstein aus Z. Wir sagen M* erzeugt Z einfach*, wenn jeder Parkettstein von Z durch genau eine aus M erzeugte Kongruenztransformation aus z hervorgeht.*

Die Menge der aus M erzeugten Kongruenztransformationen ist dann eine Symmetriegruppe einer von M einfach erzeugten Zerlegung Z der Ebene.

Punktes[3]), können wir die bisherige Linie noch mit diesem Symmetriezentrum verbinden und erhalten eine Zerlegung der Ebene in lauter asymmetrische Teile etwa wie in Muster 4)[4].

3 Simultane Zerlegungen aus Parkettierungen

Die Grundidee des von mir hier verwendeten Tricks (kurz Escher-Trick) ist die folgende daraus abgeleitete: Möchte man eine Parkettierung der Ebene mit (ggf. langweiligen) kongruenten Teilen so verändern, dass man sie nun mit anderen (ggf. interessanteren) kongruenten Teilen vorliegen hat, so muss man wissen, durch welche geometrischen Bewegungen die Nachbarteile aus dem jeweiligen Teil entstehen. Dann kann man Stücke der Grenzen quasi beliebig verändern, andere Stücke der neuen Grenze ergeben sich aus den daraus folgenden Grenzen der bewegten Nachbarteile durch Rückgängigmachen der Bewegung. Anders ausgedrückt: Die Grenze muss die der Zerlegung zu Grunde liegende Symmetrie respektieren und mehr nicht. Man kann das langweilige Ursprungsteil aus dem interessanten Ergebnisteil zusammenpuzzeln, indem man alles was übersteht abschneidet und entsprechend der Bewegung aus der das Nachbarteil entstand, in dem das Abgeschnittene liegt, wieder zurückbewegt[5].

Im Ergebnis entstehen alle Teile der neuen Parkettierung durch die selben Bewegungen aus einem fixen Teil, wie sie dies schon in der alten Parkettierung taten.

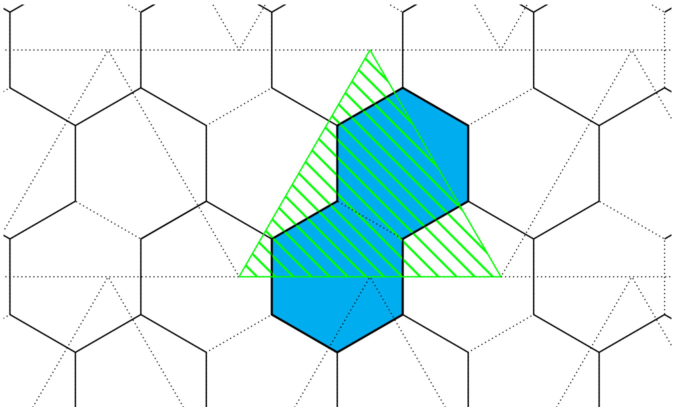
[3] Daran sieht man, dass Muster 3) von der Menge M der beiden genannten Schubspiegelungen eben nicht einfach, sondern doppelt erzeugt wird. Es gibt also für jeden Parkettstein zwei Kongruenzabbildungen, die ihn aus einem fest gewählten Prototyp erzeugen. Diese gehen hier durch Punktspiegelung am im Parkettstein enthaltenen Symmetriezentrum ineinander über.

[4] Insbesondere wenn die Teile asymmetrisch sind, ist klar, dass sie durch M einfach erzeugt werden. Ein zufälliger Punkt liegt fast sicher asymmetrisch bzgl. aller durch M erzeugten Kongruenzabbildungen (also weder auf Symmetrielinien noch auf Symmetriezentren) und seine Bilder helfen hier aber beim Zählen: enthält jeder Parkettstein genau ein Bild dieses Punktes, so ist das Parkett von M einfach erzeugt.

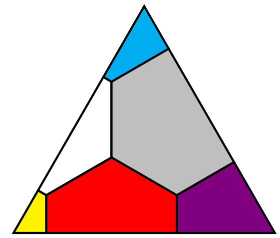
[5] Zu Grunde liegt hier die folgende Aussage:

Satz 1. *Werden zwei Zerlegungen X und Y der Ebene durch die gleiche Menge von Kongruenztransformationen M einfach erzeugt, und zerlegt X einen Parkettstein y von Y in eine Menge M_y von Teilen, so zerlegt Y einen beliebigen Parkettstein x von X in eine Menge M_x von Teilen derart, dass zwischen den Teilen aus M_x und M_y eine Bijektion existiert, die nur kongruente Teile aufeinander abbildet.*

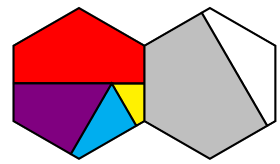
Beweis: Es gibt für jedes Teil t von M_x eine eindeutig bestimmte Kongruenzabbildung κ_t, die den Parkettstein von Y, welcher t enthält, auf y abbildet und die durch M erzeugt wird. Diese Kongruenzabbildung κ_t bildet t also auf ein Teil aus M_y ab. Umgekehrt trifft dies ebenso zu. Die Abbildung $M_x \to M_y : t \mapsto \kappa_t(t)$ ist daher die gesuchte Bijektion. □



Zerlegung13.ggb



Zerlegung13.ggb



Die langweiligen Teile könnten in Zerlegung13.ggb etwa die Dreiecke sein; die interessanten Teile die doppelten Sechsecke.

Konzentriert man sich bei der Beschreibung des dort vorliegenden Musters etwa auf die Dreiecke, so gibt es jede Menge Varianten, wie man etwa aus dem grünen Dreieck seine Nachbardreiecke gewinnen kann. Die Dekoration mit den doppelten Sechsecken soll dabei aber auch erhalten bleiben, weil nur das dann hilft, die Aufgabe zu lösen.

Das Dreiecksgitter und das Gitter aus den doppelten Sechsecken entsteht aus dem grün schraffierten Dreieck und dem blauen Sechseck durch Verschiebung um die Höhe des Dreiecks nach oben bzw. unten sowie durch Schubspiegelung an der Grundseite bei Verschiebung um die halbe Grundseite. Damit das bei dem Gitter aus doppelten Sechsecken passt, muss lediglich die Grundseite des Dreiecks die gemeinsame Mittelsenkrechte der von ihr getroffenen Sechseckseiten sein. Aus der Grundidee des Escher-Tricks[6] folgt sofort, dass und wie man aus den Dreiecksteilen die doppelten Sechsecke puzzelt:

Das Teil an der Spitze wird um die Dreieckshöhe nach unten verschoben, das Teil an der linken Ecke macht die Schubspiegelung einmal nach rechts, jenes in der rechten Ecke macht die Schubspiegelung einmal nach links und das Teil an der rechten Kante wird um die Höhe nach unten verschoben und macht danach die Schubspiegelung einmal nach links.

Das Überraschende hier ist, dass dies funktioniert, egal in welcher waagerechten Position das Dreieck relativ zu dem Gitter aus doppelten Sechsecken liegt, denn die erzeugenden Bewegungen fixieren lediglich die Grundlinie des Dreiecks auf der Geraden, auf der sie liegt. Entsprechend kann man das Dreiecksgitter (in der Geogebra-Zeichnung am rot markierten Punkt anfassen und) waagerecht verschieben, was lauter (zwar nicht wesentlich aber doch) verschiedene Zerlegungsvarianten für die Lösung dieser Aufgabe mit sich bringt. Verschiebt man das grüne Dreieck etwa so, dass eine weitere Seite Mittelsenkrechte von Sechseckkanten wird, erhält man das Bild 8a), verschiebt man es so, dass seine linke Seite das blaue doppelte

[6] Hier wird Satz 1 angewandt, wobei M aus der Verschiebung und der genannten Schubspiegelung besteht, X die Zerlegung in Dreiecke und Y die Zerlegung in doppelte Sechsecke ist.

Reines Nacheinanderausführen der Schubspiegelung erzeugt eine Zeile Dreiecke, die anderen gehen durch die nacheinanderausgeführte Verschiebung daraus hervor.

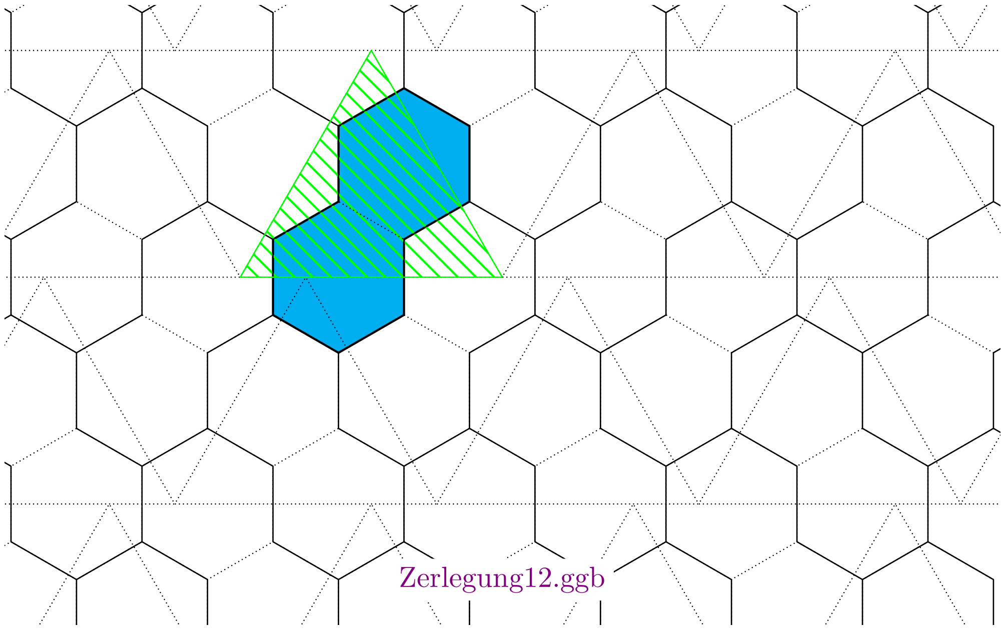
Nur die Verschiebung erzeugt eine Spalte doppelte Sechsecke, die weiteren Spalten gehen wiederum durch Schubspiegelung daraus hervor.

Dass das jeweils passt, ergibt sich aus Symmetrie und Abmessung der Dreiecke und Sechsecke.

Dass es stets nur eine erzeugte Kongruenztransformation gibt, ergibt sich, da M nur Verschiebungen sowie und Schubspiegelungen in waagerechter Richtung erzeugt.

Sechseck in zwei Ecken berührt, erhält man das Bild 8c) aus dem Buch.

Etwas komplizierter ist dagegen die Darstellung in Bild Zerlegung12.ggb, welche aber insbesondere das Bild 8c) des Buches mit der richtigen Orientierung der Zerlegung des halben blauen Sechseckes, welches unten aus dem Dreieck herausragt, liefert:



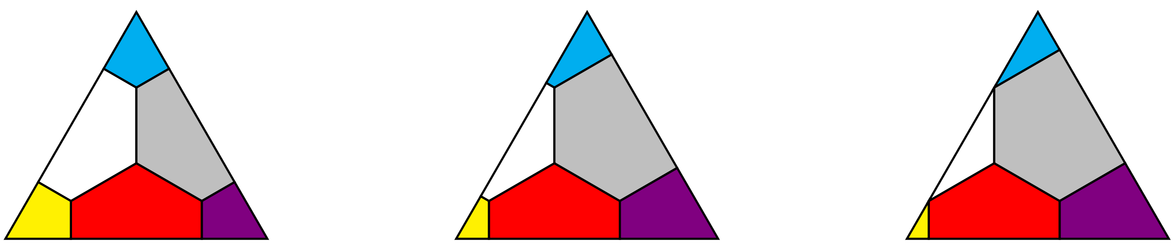
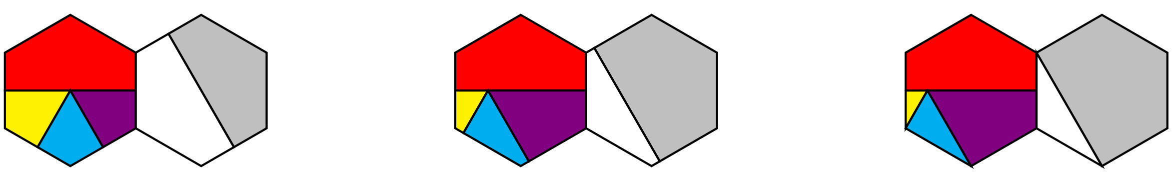


Bild 8a) zwischen 8a) und 8c) Bild 8c)

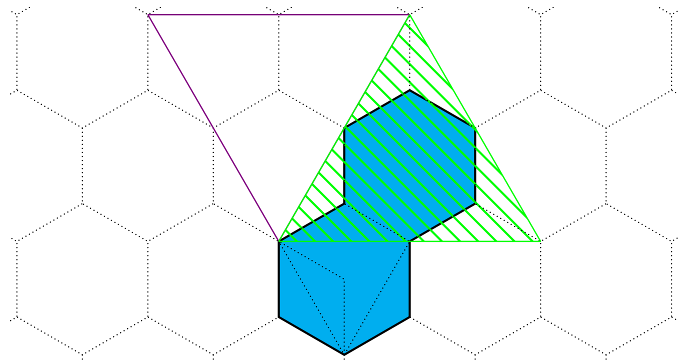


Das Gitter aus den halben Sechsecken wird hier erzeugt durch eine Schubspiegelung bezüglich der waagerechten Mittellinie des grünen Dreiecks sowie eine Schubspiegelung bezüglich seiner senkrechten Höhe (Spiegelung an der enthaltenden Geraden und Verschiebung um Streckenlänge)[7]. In Zerlegung12.ggb und Zerlegung13.ggb ist der rote Punkt beweglich.

[7] Hier wird wieder Satz 1 mit X und Y analog zu vorhin angewendet. Nur besteht M nun aus zwei Schubspiegelungen in zueinander senkrechter Richtung.

Die Identität ist eine Verschiebung und die Nacheinanderausführung von dieser Schubspiegelungen liefert nur eine Verschiebung, wenn beide gerade oft angewendet werden. Werden beide ungerade oft angewendet, ergibt sich nämlich eine Punktspiegelung; wird genau eine ungerade oft angewendet ergibt sich wieder eine Schubspiegelung, da die Orientierung nicht ungerade oft umgekehrt wird. Werden beide Schubspiegelungen gerade oft angewendet, ergibt sich aber genau die Verschiebung, welche sich auch ergibt, wenn man den Spiegelanteil weglässt. Daher erzeugt M beide Zerlegungen einfach.

Bild 8b) hat grob gesehen nichts mit diesem Trick zu tun, da es sich nicht als Überlagerung eines Dreiecksgitters und eines Gitters aus doppelten Sechsecken fortsetzen lässt. Bei jeder Zerlegung in gleichseitige Dreiecke gibt es eine Seite des grünen Dreiecks, die auch Seite eines zweiten Dreiecks ist. Und dieses enthält dann kein Sechseck vollständig.



Adaption von Bild 8b aus [1], Seite 116

4 Variationen vorliegender Zerlegungen

Letztlich besagt der Trick, dass unter Beachtung der relativen Lagen zweier Teile zueinander beim Puzzeln immer eines auf Kosten des anderen vergrößern werden kann, sofern in beiden Umgebungen des zu vergrößernden Teiles (also hier im jeweiligen zerlegten Sechseck und im zerlegten Dreieck) noch Platz ist.

Sind beide im Dreieck benachbarten Teile a und b in den Sechsecken nicht benachbart, so führt die Vergrößerung etwa von a im Dreieck zu einer Verkleinerung von b und im Sechseck zu einer Verkleinerung eines dritten Teils c. Im einfachsten Fall – und nur den betrachten wir im Folgenden – nehmen wir c voll zu a hinzu, was zu einer Verringerung der Anzahl der Teile führt, in die wir das Sechseck mit a zerlegen. Stattdessen zerschneiden wir das alte Teil b im Sechseck in das verkleinerte Teil b und das Teil c[8]. Dieses Vorgehen ändert also die Zerlegung,

---

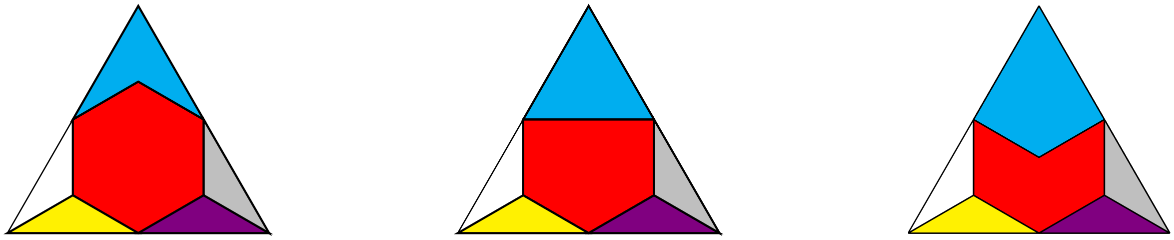
[8] Hier wird nun folgender Satz im Spezialfall erklärt:

Satz 2. *Sei (X, Y) eine simultane Zerlegung von x und y und $(\phi_t)_{t\in X}$ ein Tupel Kongruenzabbildungen entsprechend Definition 1 derart, dass für die drei verschiedenen, aus X stammenden Teile a, b und c auch $\phi_c(c) \subseteq \phi_a(b)$ gilt. Es entstehe X' aus X, indem a durch $a' := a \cup \phi_a^{-1}(\phi_c(c))$ und b durch $b' := b \setminus \phi_a^{-1}(\phi_c(c))$ ersetzt wird und es entstehe Y' indem in Y das Teil $\phi_a(a)$ durch $\phi_a(a')$ und das Teil $\phi_b(b)$ durch $\phi_b(b')$ sowie das Teil $\phi_c(c)$ durch das Teil $y = \phi_b(\phi_a^{-1}(\phi_c(c)))$ ersetzt wird. Dann bildet (X', Y') ebenfalls eine simultane Zerlegung von x und y.*

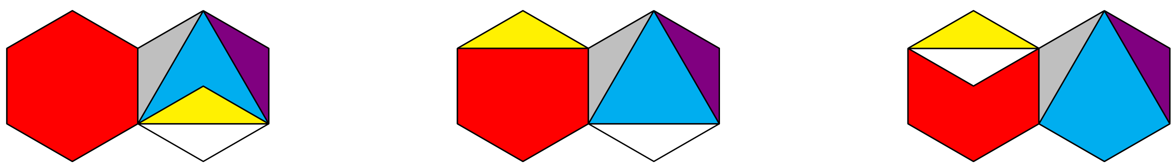
Beweis: Sei $d := \phi_a^{-1}(\phi_c(c)$. Wegen $\phi_c(c) \subseteq \phi_a(b)$ folgt durch Anwendung von ϕ_a^{-1} auch $d \subseteq b$. Damit ist d im Inneren disjunkt zu a. Folglich habe die Teile $a' = a \cup d$ und $b' = b \setminus d$ im Inneren nichts gemein und ihre Vereinigung ist genau $a \cup b$. Weiter ist $\phi_a(a') = \phi_a(a) \cup \phi_c(c)$, $\phi_b(b') = \phi_b(b \setminus d)$ und $y = \phi_b(d)$. wieder ergibt sich, dass die drei neuen Teile im Inneren disjunkt sind und ihre Vereinigung gleich der der alten Teile ist. □

Um den Satz zu verstehen, ist es hilfreich, sich die Bedeutung der Abbildungen $(\phi_t)_{t\in X}$ klarzumachen. Ist x etwa das zerlegte Dreieck und y das zerlegte doppelte Sechseck, so sind X und Y jeweils die Mengen der farbigen Teilflächen. Ist a in Zerlegung1.ggb etwa das blaue Drachenviereck im zerlegten Dreieck x oben, so ist ϕ_a eine Kongruenzabbildung, die dieses in das blaue Drachenviereck im zerlegten doppelten Sechseck y unten überführt. Davon gibt es freilich mehrere, nämlich eine Spiegelung und eine Schubspiegelung und man hat die Auswahl. Ist c in Zerlegung1.ggb nun das gelbe Dreieck in x, so ist $\phi_c(c)$ das entsprechende gelbe Dreieck in y, welches das dortige blaue Drachenviereck zu einem Dreieck ergänzt. ϕ_a^{-1} überführt nun das blaue Drachenviereck in y in das blaue Drachenviereck in x und damit ist auch klar, wo $\phi_a^{-1}(\phi_c(c))$ liegt – das gelbe Dreieck in y wird mitgenommen. Es landet im roten Sechseck b oben (in x) als der Teil, welcher das darüberliegende blaue Drachenviereck zu einem Dreieck ergänzen würde. Dieser Teil wird nun aus b nach a verfrachtet, was b' bzw. a' erzeugt.

wobei aber nur die Einzelteile A und B ihre Form ändern, Teil C wechselt nur seine Position in den Sechsecken.



Zerlegung1.ggb Zerlegung2.ggb Zerlegung3.ggb



Startet man also mit einer Lösung gemäß Bild 6 bzw. Zerlegung1.ggb, so kann man das obere Drachenviereck um ein oder zwei der unteren Dreiecke vergrößern und erhält Zerlegung2.ggb bzw. Zerlegung3.ggb[9].

In Zerlegung 3.ggb könnte das weiße Dreieck oben beim Übergang nach unten etwa in die Innenecke des noch konkaven roten Sechsecks gespiegelt werden[10]. Damit können wir also die gemeinsame Grenze (damit sind hier alle Linien gemeint, die in der einen oder anderen Lage

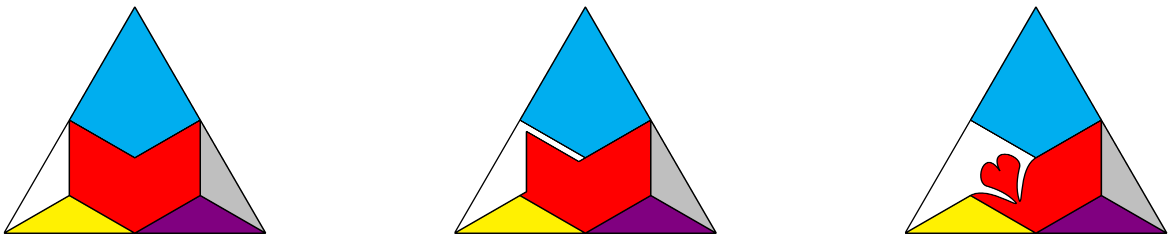
[9] Hier wird Satz 2 wie in der Erklärung angedeutet genutzt. Die simultane Zerlegung (X, Y) des Dreiecks x und des doppelten Sechsecks y aus Zerlegung1.ggb mit a als blauem Drachenviereck, b als rotem Sechseck und c als gelbem Dreieck ist der Startpunkt. Beim Übergang zu X' erhält a' die Farbe von a und b' die Farbe von b. Die simultane Zerlegung von y ist freilich so eingefärbt, dass für jedes Teil $t \in X$ das Teil t und sein Bild $\phi_t(t) \in Y$ die gleiche Farbe erhalten. Freilich können die Farben kongruenter Teile aus X permutiert werden, was eine andere Wahl passender Kongruenzabbiltungen $(\phi_t)_{t \in X}$ erzeugt. Hier und im Folgenden wurde darauf der Übersichtlichkeit halber verzichtet – im Allgemeinen kann diese Idee aber auch hilfreich sein.

Beim Übergang von Zerlegung2.ggb zu Zerlegung3.ggb nun wird Satz 2 mit a als blauem Dreieck, b als rotem Fünfeck und c als weißem Dreieck angewandt.

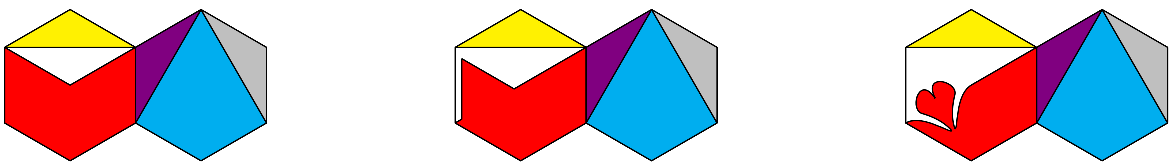
[10] Ist a das rote Sechseck und b das weiße Dreieck, so stellt man sich also ϕ_b hier so vor, dass zunächst das obere weiße Dreieck genommen und durch Spiegelung an das rote Sechseck geheftet wird (per Kongruenzabbildung ψ). Dann wird letzteres an seinen Platz unten verschoben, was die Kongruenzabbildung ϕ_a macht. Die Kongruenzabbildung ψ erfüllt dann $\phi_a(\psi(b)) = \phi_b$ und das liefert $\psi = \phi_a^{-1}(\phi_b(b))$. Für ψ kommen nun eine Drehung um den Mittelpunkt der unteren Kante des zerlegten Dreieckes x sowie eine Spiegelung an der Mittellinie von x, die seine linke untere Ecke abschneidet, in Frage.

Letzteres wird weiterbetrachtet.

gemeinsame Grenze sind) auch in das Sechseck verschieben[11]. Dies ist in Zerlegung4.ggb illustriert, hier kann in der Geogebra-Bebilderung an den roten Punkten die gemeinsame Grenze ein wenig manipuliert werden, allgemein sind da aber noch ganz andere Formen möglich. Zwei davon sind hier als Zerlegung4.ggb beschriftet.



Zerlegung3.ggb Zerlegung4.ggb Zerlegung4.ggb

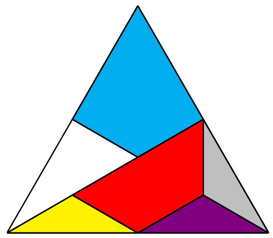


Zwei extreme Spezialfälle von dieser Manipulation sind das Bild 9 aus dem Buch [2] (siehe Zerlegung5.ggb) wo die gemeinsame Grenze schlicht eine Strecke ist, sowie Zerlegung6.ggb, wo von dem roten Sechseck nur noch ein roter Rhombus übrig ist.

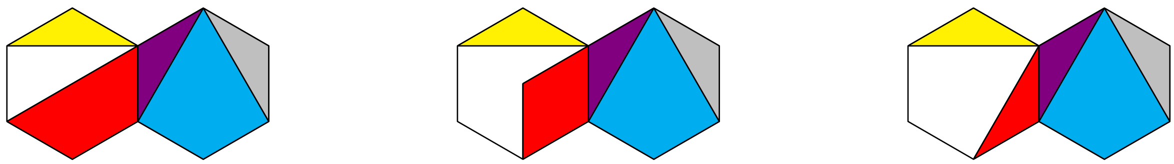
[11] Formal verwenden wir

Satz 3. *Sei (X, Y) eine simultane Zerlegung von x und y und $(\phi_t)_{t\in X}$ ein Tupel Kongruenzabbildungen entsprechend der vorstehenden Definition. Seien weiter zwei Teile a und b aus X sowie eine Fläche $s \subseteq (a \cup b) \cap \phi_a^{-1}(\phi_b(a \cup b))$ mit $\phi_a(s) = \phi_b(s)$ gegeben. Sind die Symmetrischen Differenzen $a \triangle s$ und $b \triangle s$ mit a' und b' bezeichnet und X' aus X durch Ersetzung von a durch a' und b durch b' sowie Y' aus Y durch Ersetzung von $\phi_a(a)$ durch $\phi_a(a')$ und $\phi_b(b)$ durch $\phi_b(b')$ erzeugt, dann bildet (X', Y') ebenfalls eine simultane Zerlegung von x und y.*

Beweis: In der Tat ist klar, dass X' wieder eine Zerlegung von X darstellt.
Weiter ist $\phi_a(a') \cap \phi_b(b') = \phi_a(a \triangle s) \cap \phi_b(b \triangle s) = (\phi_a(a) \triangle \phi_a(s)) \cap (\phi_b(b) \triangle \phi_b(s)) = \phi_a(a) \cap \phi_b(b)$ und analog $\phi_a(a \triangle s) \cup \phi_b(b \triangle s) = \phi_a(a) \cup \phi_b(b)$, weswegen Y' auch wieder eine Zerlegung von y darstellt. Beide Zerlegungen laufen vermöge der selben Kogruenztransformationen simultan, die auch schon (X, Y) zu einer simultanen Zerlegung gemacht haben. □

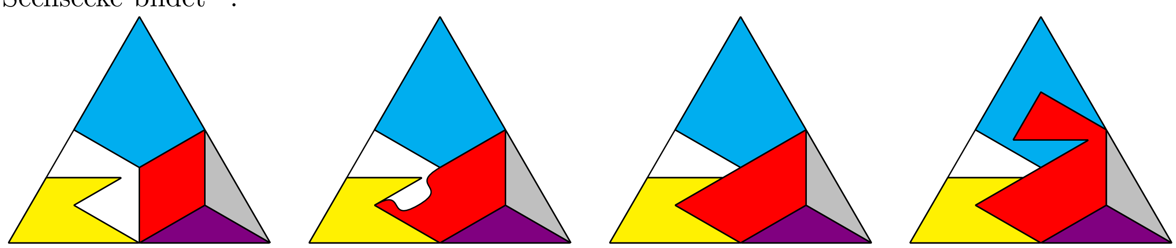


Zerlegung5.ggb Zerlegung6.ggb Zerlegung7.ggb

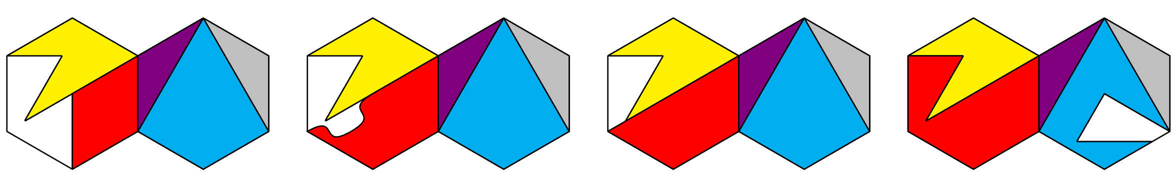


In Zerlegung6.ggb grenzt das weiße Fünfeck in Y an den roten Rhombus. Analog zu dem Fall, dass die beiden Teile im zerlegten Dreieck eine gemeinsame Grenze haben, in den zerlegten Sechsecken aber nicht, können wir auch hier die gemeinsame Grenze um das Teil verschieben, an welches das entsprechende Fünfeck im zerlegten Dreieck grenzt[12]. Ergebnis: Aus dem Fünfeck wird ein Drachenviereck und der Rhombus wird an seiener langen Diagonalen zerlegt wie im Buch in Bild 7 (vgl. Zerlegung7.ggb).

Ausgehend von Zerlegung4.ggb, Zerlegung5.ggb bzw. Zerlegung6.ggb fällt auf, dass das gelbe Dreieck unten links in der Dreieckszerlegung durch eine Drehung um 60° um die linke Ecke an sein weißes Nachbarteil oben links gesetzt werden kann, wenn man die zerlegten Sechsecke bildet[13].



Zerlegung8.ggb Zerlegung9.ggb Zerlegung10.ggb Zerlegung11.ggb



Da sein dortiger Innenwinkel 30° ist, kann man es auch zweimal um 30° drehen. Mit

[12] Wir wenden hier Satz 2 an, wobei nun X die Zerlegung des doppelten Sechsecks x und Y die Zerlegung des Dreiecks y ist. Teil a ist dann das weiße Fünfeck unten (in X), Teil b der rote Rhombus unten (ebenfalls in X) und Teil c ist das gelbe Dreieck. Die Anwendbarkeit ist offensichtlich und das Ergebnis ist Zerlegung7.ggb.

[13] Ist a das weiße Teil und b das gelbe Dreieck jeweils oben im zerlegten Dreieck x, so ist damit wieder die Bewegung $\phi_a^{-1}(\phi_b(b))$ gemeint.

seinem Bild nach der ersten Drehung vereinigt muss man es dann nur noch um 30° drehen, um den gleichen Effekt zu erzielen. Somit kann man es also um sein Bild d bei Drehung um 30° erweitern und d aus dem weißen Teil entfernen und erhält die in Zerlegung9.ggb, Zerlegung10.ggb bzw. Zerlegung8.ggb illustrierten Varianten[14].

In Zerlegung8.ggb bildet der Rest nun ein ziemlich verkorkstes weißes Sechseck, welches mit dem roten Rhombus und dem entstandenen gelben Fünfeck zusammen eines der zerlegten Sechsecke ergibt. Insbesondere muss das weiße Sechseck dabei relativ zu dem blauen Rhombus gespiegelt werden, weswegen wir seine mit dem roten Rhombus gemeinsame Grenzlinie wieder spiegelsymmetriebeachtend recht frei verändern können. Auch das ergibt Zerlegung9.ggb (die hier zu verändernden Punkte sind in der geogebra-Datei wieder rot gekennzeichnet, es sind freilich kompliziertere Formen möglich). Entsprechend kann Zerlegung10.ggb auch als Extremfall von Zerlegung9.ggb aufgefasst werden.

In Zerlegung10.ggb nun grenzt oben an das rote halbe Sechseck das blaue Drachenviereck. Die entsprechenden Flächen gehören unten zu verschiedenen zerlegten Sechsecken. Hier kann man nun das rote halbe Sechseck unten um sein weißes Nachbarteil erweitern, und das blaue Drachenviereck entsprechend verkleinern[15]. Das liefert die besonders eigenartige Variante Zerlegung11.ggb.

Es gibt noch weitere, hier nicht aufgeführte Zerlegungsvarianten. Insbesondere sind im vorliegenden Text noch gar nicht die entsprechenden Möglichkeiten für die aus Zerlegung12.ggb resultierenden Varianten erwähnt. Ebensowenig ist systematisch nach allen sich aus den im Buch gegebenen Zerlegungen durch die angegebenen Änderungsideen erreichbaren weiteren Zerlegungen gesucht worden. Dieser Text lässt damit noch Luft für das Finden weiterer Zerlegungen durch Abänderung bereits präsentierter Varianten.

Betrachtet man zwei simultane Zerlegungen als äquivalent, wenn sie durch Anwendung der hier vorgestellten Tricks auseinander hervorgehen, so ist noch nicht klar, ob eine der angegebenen Zerlegungen durch simultanes Parkettieren der Ebene aus den anderen simultanen Zerlegungen vermöge der angegebenen Sätzen erzeugt werden kann. Vermutlich trifft das nicht zu. Auch ist nicht klar, ob es außer den durch Repräsentanten angegebenen Äquivalenzklassen (zwei oder vielleicht nur eine) noch weitere Äquivalenzklassen simultaner Zerlegungen gibt.

Eine Zerlegung, die sich nicht vermöge der hier angegebenen Ideen aus den im Buch gegebenen Ausgangszerlegungen erzeugen lässt, wäre in meinen Augen eine wirklich neue Zerlegung!

---

[14] Das entspricht der dritten Variante des Escher-Tricks:

Satz 4. *Sei (X, Y) eine simultane Zerlegung von x und y und $(\phi_t)_{t\in X}$ ein Tupel Kongruenzabbildungen entsprechend der vorstehenden Definition. Seien weiter zwei Teile a und b aus X und ein $k \in \mathbb{N}$ derart gegeben, dass $\phi_a^{-1}(\phi_b(b)) = \psi^k(b)$ und $d := \bigcup_{i=1}^{k-1} \psi^i(b) \subseteq a$ gilt. Erzeugt man X' aus X indem man b durch $b' = b \cup d$ und a durch $a' = a \setminus d$ ersetzt und erzeugt Y' indem man $\phi_a(a)$ durch $\phi_a(a')$ und $\phi_b(b)$ durch $\phi_a(\psi(b'))$ ersetzt, dann bildet (X', Y') ebenfalls eine simultane Zerlegung von x und y.*

Beweis: Auch hier ist wieder klar, dass X' eine Zerlegung von x ist. Auch die Kongruenztransformationen von X' nach Y' sind klar: Es ist $\phi_{a'} = \phi_a$ und $\phi_{b'} = \phi_a \circ \psi$. Weiter ist $\phi_{a'}(a') = \phi_a(a) \setminus \phi_a(d)$ und $\phi_{b'}(b') = \phi_a(\psi(d \cup b)) = \phi_a(\psi(\bigcup_{i=0}^{k-1} \psi^i(b))) = \phi_a(\bigcup_{i=1}^{k} \psi^i(b)) = \phi_a(\psi^k(b)) \cup \phi_a(d) = \phi_b(b) \cup \phi_a(x)$ und damit ist Y' in der Tat Zerlegung von y. □

[15] Hier wird Satz 2 angewandt, wobei nun wieder x das zerlegte Dreieck und y die zerlegten Sechsecke sind. Die Zerlegungen X und Y sind freilich die aus Zerlegung 10.ggb. Teil a ist das rote halbe Sechseck oben, Teil b das blaue Drachenviereck oben und Teil c das weiße Viereck im zerlegten Dreieck.

Literatur

[1] Aufgabenkommission des Bundeswettbewerbs, Aufgaben und Lösungen Bildung & Begabung gGmbH 2004 Runde 1, besucht am 18.Oktober 2016, 9:43 Uhr morgens.

[2] H.-H. Langmann, E. Quaisser, E. Specht (Hrsg.), Bundeswettbewerb Mathematik – Die schönsten Aufgaben. *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 113–117 (C. Wissemann–Hartmann: Spiele mit Parkettierungen), 2016.

[3] Pixelday, Websuite M.C. Escher, *The M.C. Escher Company B.V.*, About Escher, besucht am 18. Oktober 2016, 8:00 Uhr morgens.

[4] Pixelday, Websuite M.C. Escher, *The M.C. Escher Company B.V.*, Gallery > Symmetry, besucht am 18. Oktober 2016, 8:05 Uhr morgens.