

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2017

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: 15. Mai 2017

GEFÖRDERT VOM



Bundesministerium
für Bildung
und Forschung



STIFTERVERBAND



KULTUSMINISTER
KONFERENZ



Aufgabe 1: Die Zahlen 1, 2, 3, ..., 2017 stehen an der Tafel. Amelie und Boris wischen abwechselnd je eine dieser Zahlen weg, bis nur noch zwei Zahlen übrig bleiben. Amelie beginnt. Wenn die Summe der beiden letzten Zahlen durch 8 teilbar ist, gewinnt Amelie, ansonsten Boris.

Wer kann den Gewinn erzwingen?

Anmerkung: Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Antwort: Amelie kann den Gewinn erzwingen.

Bezeichnungen: Die Wörter "wegwischen" und "streichen" werden synonym verwendet, einen Wischvorgang bezeichnen wir auch als "Zug". Der *Achterrest* einer Zahl sei der Rest, der nach Division dieser Zahl durch 8 bleibt. Die Achterreste 0 und 8 betrachten wir als identisch.

1. Beweis (Paarbildung): Zwei Zahlen, deren Summe durch 8 teilbar ist, nennen wir ein *Achterpaar*. Wir fassen die Zahlen 1, 2, ..., 2016 folgendermaßen zu 1008 Achterpaaren zusammen: Für jedes $i = 1, 2, \dots, 1007$ die beiden Zahlen $1008 + i$ und $1008 - i$, sowie die beiden Zahlen 1008 und 2016. Als Summe in den Paaren ergibt sich jeweils $2 \cdot 1008 = 252 \cdot 8$ bzw. $3024 = 378 \cdot 8$, d.h. jedes der Paare ist ein Achterpaar. Ferner kommt jede der Zahlen 1, 2, ..., 2016 in genau einem der gebildeten Achterpaare vor.

Beschreibung einer erfolgreichen Strategie: Amelie wischt als Erstes die Zahl 2017 weg, danach wischt sie nach jedem Zug von Boris diejenige Zahl weg, die mit der von Boris weggewischten Zahl das oben beschriebene Achterpaar bildet.

Nachweis, dass die Strategie befolgt werden kann: Vor ihrem ersten Zug stehen noch alle Zahlen an der Tafel, insbesondere die 2017. Danach stehen nur noch vollständige Achterpaare von Zahlen an der Tafel, diese Situation nennen wir *A-Situation*. In einer *A-Situation* kann Boris nur eine Zahl aus einem vollständigen Achterpaar wegwischen. Die andere Zahl aus diesem Achterpaar steht danach noch an der Tafel und Amelie kann sie wegwischen, d.h. ihre Strategie befolgen. Danach steht Boris wieder vor einer *A-Situation*.

Nachweis, dass die Strategie zum Sieg führt: Nach insgesamt 2015-maligem Wischen, d.h. nach einem Zug von Amelie, stehen noch $2017 - 2015 = 2$ Zahlen an der Tafel. Diese bilden ein Achterpaar von Zahlen, damit hat Amelie gewonnen.

2. Beweis (mit Achterresten, letztlich nur eine Variante des ersten Beweises):

Folgende Strategie führt für Amelie zum Sieg: Sie streicht am Anfang eine beliebige Zahl mit Achterrest 1 (also eine der Zahlen 1, 9, 17, 25, ...). Danach antwortet sie auf jeden Zug von Boris folgendermaßen: Wenn Boris eine Zahl b streicht, streicht sie irgendeine Zahl a mit der Eigenschaft, dass $a + b$ durch 8 teilbar ist.

(Dies kann man formal ausdrücken: Wenn Boris eine Zahl mit Achterrest r streicht ($r \in \{0, 1, \dots, 7\}$), dann streicht Amelie eine Zahl mit Achterrest $8 - r$.)

Wir zeigen zuerst, dass die Strategie immer befolgt werden kann:

Am Anfang gibt es mindestens eine Zahl mit Achterrest 1 (z.B. die Zahl 1); d.h. Amelie kann den ersten Zug ihrer Strategie machen. Bei ihren anderen Zügen gilt Folgendes:

Mit a_r bezeichnen wir die Anzahl der Zahlen an der Tafel mit Achterrest r . Nach Amelies erstem Zug, also vor einem Zug von Boris, ist offensichtlich $a_r = 2016 : 8 = 252$ für alle $r \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}$. Insbesondere ist $a_r = a_{8-r}$ für jedes $r \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$, ferner sind a_0 und a_4 beide gerade; eine solche Situation nennen wir *A-Situation*. Wenn Boris vor einer solchen steht, hat er nur zwei Möglichkeiten zu wischen:

Möglichkeit 1: Boris streicht eine Zahl mit Achterrest $r \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$. In diesem Fall ist $r \neq 8 - r$. Also ist nach Boris' Zug $0 \leq a_r = a_{8-r} - 1$. Insbesondere ist $a_{8-r} \geq 1$, d.h. es gibt



mindestens eine Zahl mit Achterrest $8 - r$. Diese Zahl wählt Amelie und wischt sie weg, d.h. sie kann einen Zug gemäß ihrer Strategie machen. Nach ihrem Zug ist dann wieder $a_r = a_{8-r}$ und die Anzahl der Zahlen mit anderen Achterresten ist gleichgeblieben, d.h. Boris steht wieder vor einer A-Situation.

Möglichkeit 2: Nicht Möglichkeit 1, d.h. Boris streicht eine Zahl mit Achterrest $r \in \{0, 4\}$, dann ist $r = 8 - r$. Vor dem Zug von Boris sind a_0 und a_4 beide gerade, d.h. nach einem Zug von Boris ist genau eine der Zahlen a_0 oder a_4 ungerade, insbesondere größer als Null. Es gibt also mindestens eine weitere Zahl mit dem Achterrest der von Boris gestrichenen Zahl. Diese Zahl wählt Amelie und wischt sie weg, d.h. Amelie kann den Zug gemäß ihrer Strategie machen. Nach ihrem Zug sind dann wieder a_0 und a_4 beide gerade, die Anzahl der Zahlen mit den anderen Achterresten ist gleich geblieben, d.h. Boris steht wieder vor einer A-Situation.

Schließlich zeigen wir, dass die Strategie zum Gewinn führt. Dies ist auf zwei Arten möglich:

Variante 1: Amelie erreicht mit ihrer Strategie, dass nach jedem ihrer Züge $a_r = a_{8-r}$ für jedes $r \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ und dass a_0 und a_4 beide gerade sind, d.h. dass Boris immer eine A-Situation vorfindet. Weiter ist die Anzahl der Zahlen an der Tafel nach ihrem Zug immer gerade und nimmt mit jedem Zug ab, d.h. irgendwann steht Boris vor einer A-Situation mit genau zwei Zahlen. Dies können dann nur zwei Zahlen mit Achterrest 0 sein, oder zwei Zahlen mit Achterrest 4, oder zwei Zahlen, von denen die eine Achterrest r und die andere Achterrest $8 - r$ hat. In jedem Fall ist dann die Summe dieser beiden Zahlen durch 8 teilbar und Amelie hat gewonnen.

Variante 2: Es ist $1 + 2 + 3 + \dots + 2017 = \frac{1}{2} \cdot 2017 \cdot 2018 = \frac{1}{2} \cdot (252 \cdot 8 + 1) \cdot (252 \cdot 8 + 2) = (252 \cdot 8 + 1) \cdot (126 \cdot 8 + 1) = (252 \cdot 126 \cdot 8 + 252 + 126) \cdot 8 + 1$. Da Amelie im ersten Zug eine Zahl mit Achterrest 1 wegwischt, ist vor dem ersten Wischen von Boris die Gesamtsumme aller Zahlen an der Tafel durch 8 teilbar und es steht eine gerade Anzahl von Zahlen an der Tafel. Mit jedem Doppelzug von Boris und Amelie wird eine gerade Zahl von Zahlen weggewischt, deren Summe eine durch 8 teilbare Zahl ist, d.h. Boris steht vor jedem seiner Züge vor dieser Situation. Insbesondere ist zum Schluss die Summe der letzten beiden Zahlen an der Tafel durch 8 teilbar, d.h. Amelie hat gewonnen.



Aufgabe 2: Wie viele spitze Innenwinkel kann ein überschneidungsfreies ebenes 2017-Eck höchstens haben?

Anmerkungen: Das 2017-Eck darf überstumpfe Innenwinkel besitzen. Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Bemerkung: Diese Fragestellung fordert die Angabe einer *kleinsten oberen Schranke* S , d.h. die Angabe einer Zahl S , die zwei Eigenschaften hat: *a*) es gibt kein 2017-Eck mit mehr als S spitzen Innenwinkeln und *b*) es gibt ein 2017-Eck mit S spitzen Innenwinkeln. Ohne die Forderung *b*) wäre die Fragestellung sinnlos, weil dann die Antwort "höchstens 2017" schnell gefunden und auch richtig wäre.

Antwort: Ein ebenes überschneidungsfreies 2017-Eck kann höchstens 1345 spitze Innenwinkel haben.

Allgemein gilt: Ein ebenes überschneidungsfreies n -Eck ($n \geq 3$) kann höchstens $\left\lfloor \frac{2}{3}n \right\rfloor + 1$ spitze Innenwinkel haben.

Bezeichnungen: Den Ausdruck "ebenes überlappungsfreies n -Eck" verkürzen wir im Rahmen dieser Aufgabe zu " n -Eck". Ein Winkel α heiße spitz / stumpf / gestreckt / überstumpf, wenn $\alpha < 90^\circ$ / $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ / $\alpha = 180^\circ$ / $\alpha > 180^\circ$ ist. Anstatt von "Innenwinkeln" sprechen wir oft verkürzt von "Winkeln".

1. Beweis: Bekanntlich hat ein n -Eck eine Innenwinkelsumme von $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Wenn von den n Innenwinkeln s Innenwinkel spitz sind, d.h. wenn s Innenwinkel kleiner als 90° sind, dann können wir abschätzen:

$$\begin{aligned} (n - 2) \cdot 180^\circ &< s \cdot 90^\circ + (n - s) \cdot 360^\circ \\ \Leftrightarrow (n - 2) \cdot 2 &< s \cdot 1 + (n - s) \cdot 4 \\ \Leftrightarrow 3s &< 2n + 4 \\ \Leftrightarrow s &< \frac{2}{3} \cdot (n + 2). \end{aligned}$$

Für $n = 2017$ ergibt sich $s < \frac{2}{3} \cdot (2017 + 2) = 1346$, also $s \leq 1345$.

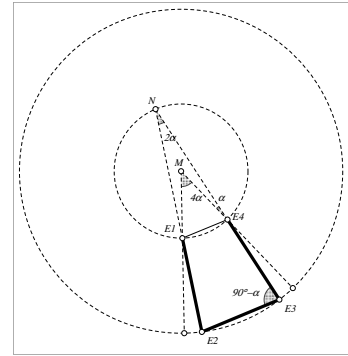
Diese Schranke ist auch scharf, d.h. die Zahl 1345 kann nicht durch eine kleinere Zahl ersetzt werden. Um dies zu zeigen, beschreiben wir obige Abschätzung für den allgemeinen Fall:

$$\begin{aligned} \text{Für } n = 3m + i \text{ (} m \geq 1, i \in \{0, 1, 2\}\text{) gilt } s &< \frac{2}{3} \cdot ((3m + i) + 2) = 2m + 1 + \frac{(2i + 1)}{3}, \\ \text{also } s \leq 2m + 1 \text{ für } i \in \{0, 1\} \text{ und } s \leq 2m + 2 \text{ für } i = 2. \end{aligned}$$

Nun genügt es, für jedes m und i ein $(3m + i)$ -Eck mit $2m + 1$ bzw. $2m + 2$ spitzen Innenwinkeln zu konstruieren; für $m = 672$ und $i = 1$ erhalten wir mit $3 \cdot 672 + 1 = 2017$ und $2m + 1 = 1345$ den geforderten Beweis.



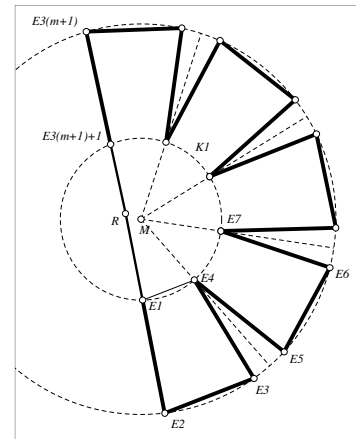
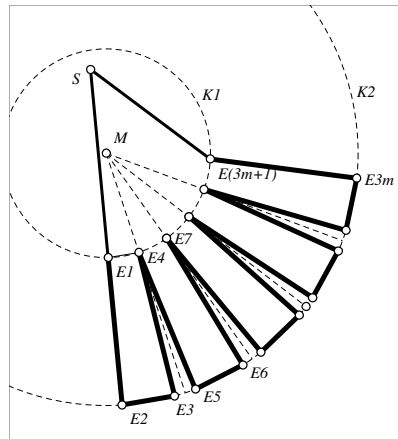
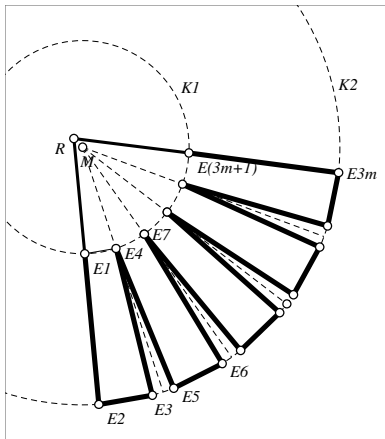
Mit α -Schwalbenschwanz ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) bezeichnen wir (einem Bild aus dem Schreinerberuf folgend) ein achsensymmetrisches Trapez $E_1E_2E_3E_4$ mit $E_1E_4 \parallel E_2E_3$ und Basiswinkeln $\angle E_3E_2E_1 = \angle E_4E_3E_2 = 90^\circ - \alpha < 90^\circ$ (vgl. Figur).



Wir erarbeiten uns einige Eigenschaften: Die beiden Basiswinkel des Schwalbenschwanzes sind spitz. Verlängerung der Seiten E_2E_1 und E_3E_4 ergänzt den α -Schwalbenschwanz zu einem gleichschenkligen Dreieck E_2NE_3 . Der Punkt N existiert, weil $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Einfache Winkelberechnung im gleichschenkligen Dreieck E_2NE_3 ergibt $\angle E_2NE_3 = 2\alpha$. Den Umkreis des Dreiecks E_1NE_4 bezeichnen wir mit K_1 , seinen Mittelpunkt mit M . Nach Umfangswinkelsatz gilt $\angle E_1ME_4 = 4\alpha$, im gleichschenkligen Dreieck NME_4 ist $\angle NE_4M = \alpha$. Weil M im Innern des gleichschenkligen Dreiecks E_4NE_1 liegt, verläuft der Strahl $[ME_4]$ außerhalb des Schwalbenschwanzes, d.h. der Schwalbenschwanz liegt vollständig in einer durch die Gerade ME_4 bestimmten Halbebene, nur der Eckpunkt E_4 liegt auf ME_4 . Der Kreis K_2 um M durch E_2 geht auch durch E_3 .

Wenn man den Schwalbenschwanz an ME_4 spiegelt, so entspricht dies einer Drehung um M um einen Winkel 4α . Nach dieser Abbildung liegen die Ecken des Spiegelbildes wieder auf K_1 bzw. K_2 , der Schwalbenschwanz und sein Spiegelbild überlappen sich nicht (mit Ausnahme eines Eckpunktes), und die Gerade E_2E_1 trifft ihr Spiegelbild unter einem Winkel von 6α . Nun wiederholen wir solche Drehungen um den Winkel 4α , bis wir eine Kette von m α -Schwalbenschwänzen $E_1E_2E_3E_4, E_4E_5E_6E_7, \dots, E_{3m-2}E_{3m-1}E_{3m}E_{3m+1}$ haben (linke Figur).

Der Schnittwinkel zwischen den äußersten Geraden E_1E_2 und $E_{3m}E_{3m+1}$ ist dann $(m - 1) \cdot 4\alpha + 2\alpha = (4m - 2)\alpha$, d.h. wenn wir α genügend klein wählen, ist dieser Schnittwinkel spitz und der Schnittpunkt dieser beiden Geraden – wir nennen ihn R – existiert (Figur links, konkret wählt man $\alpha < 90^\circ / (4m - 2)$).



Nun können wir die drei Fälle abhandeln:

($3m$)–Eck mit $2m + 1$ spitzen Innenwinkeln (linke Figur mit $m = 5$): Nun bilden die m Schwalbenschwänze zusammen mit dem Punkt R ein überschneidungsfreies $3m$ –Eck $RE_2E_3E_4 \dots E_{3m}$; an der Ecke R und an den äußeren Ecken E_{3i-1} und E_{3i} – dies sind $2m + 1$ Ecken – befinden sich spitze Winkel.

($3m + 1$)–Eck mit $2m + 1$ spitzen Innenwinkeln (mittlere Figur mit $m = 5$): Im $3m$ –Eck mit $2m + 1$ spitzen Innenwinkeln "ziehen wir R nach außen und fügen bei E_{3m+1} eine neue überstumpfe Ecke ein", d.h. wir wählen auf dem Strahl E_2R einen Punkt S so, dass R zwischen E_2 und S liegt. Dann ist das ($3m+1$)–Eck $SE_2E_3E_4 \dots E_{3m}E_{3m+1}$ überschneidungsfrei, es hat an den Ecken E_{3i-1} und E_{3i} spitze Winkel, und auch an der Ecke bei S liegt ein spitzer Winkel, insgesamt sind es wieder $2m + 1$ spitze Innenwinkel.



$(3m + 2)$ -Eck mit $2m + 2$ spitzen Winkeln (rechte Figur mit $m = 4$), : Hierzu bilden wir eine Kette von $m + 1$ Schwalbenschwänzen und wählen α so, dass der Schnittwinkel von E_1E_2 mit $E_{3(m+1)}E_{3(m+1)+1}$ einen Schnittwinkel von 180° bildet. (Konkret: $180^\circ - 2\alpha = m \cdot 4\alpha$, also wählt man $\alpha = 180^\circ / (4m+2)$). Dann sind die beiden Geraden nicht nur parallel, sondern sie fallen sogar zusammen, dies folgt aus der Symmetrie der Gesamtfigur bez. des Lotes von M auf die Gerade E_1E_2 . Damit haben wir das $(3m + 2)$ -Eck $E_2E_3 \dots E_{3(m+1)}$ (der Punkt R ist dann keine Ecke mehr!) mit den spitzen Winkeln bei den $2m+2$ Ecken E_{3i} und E_{3i-1} .

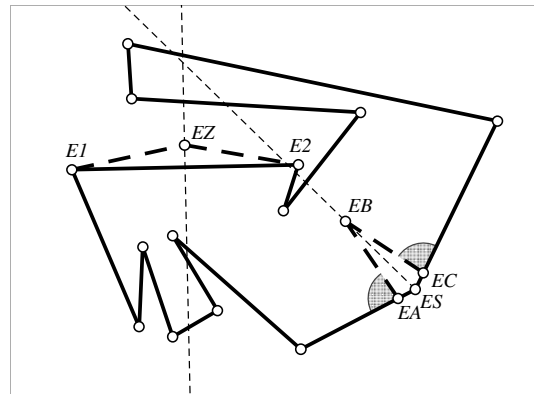
2. Beweis (induktiv): Der Nachweis für $s < \frac{2}{3} \cdot (n + 2)$ verläuft wie im 1. Beweis. Dass diese Schranke scharf ist, beweisen wir mit vollständiger Induktion:

Für jedes pos. ganzz. $n \geq 3$ gibt es n -Ecke mit $S(n) := \left\lfloor \frac{2}{3}n \right\rfloor + 1$ spitzen Innenwinkeln.

Für die vollständige Induktion benötigen wir zwei Hilfssätze:

HS 1 ("Ausbeulen" der Seite E_1E_2): Zu jedem n -Eck $E_1E_2 \dots E_n$ mit k spitzen Innenwinkeln, $n \geq 3$, gibt es einen Punkt E_Z , sodass das $(n + 1)$ -Eck $E_1E_ZE_2 \dots E_n$ auch k spitze Innenwinkel und einem stumpfen Innenwinkel bei Ecke E_Z hat.

Beweis des HS 1: Wir wählen E_Z auf der Mittelsenkrechten der Strecke E_1E_2 so, dass die Strecken E_1E_Z und E_ZE_2 vollständig außerhalb des n -Ecks liegen, dies ist immer möglich. Das neue $(n + 1)$ -Eck $E_1E_ZE_2 \dots E_n$ ist dann überschneidungsfrei, es besitzt die gleichen Innenwinkel wie das alte n -Eck mit Ausnahme Winkel an den Ecken E_1 und E_2 , dort wurden die Winkel größer. Wenn wir E_Z mit genügend kleinem Abstand zu E_1E_2 wählen, dann sind diese Innenwinkel im $(n + 1)$ -Eck immer noch spitz und es ist auch $\angle E_1E_ZE_2 > 90^\circ$. Damit ist die Anzahl der spitzen Innenwinkel in beiden Vielecken gleich.



HS 2: ("Einfügen einer Spitze"): Zu jedem überschneidungsfreien n -Eck $E_1 \dots E_S \dots E_n$ mit k spitzen Innenwinkeln und einem stumpfen Innenwinkel bei E_S gibt es Punkte E_A, E_B, E_C so, dass das $(n + 2)$ -Eck $E_1 \dots E_A E_B E_C \dots E_n$ überschneidungsfrei ist und $k + 2$ spitze Innenwinkel besitzt.

Beweis des HS 2: Wir wählen auf der Winkelhalbierenden durch Ecke E_S einen Punkt E_B so, dass die Strecke $E_S E_B$ ganz im Innern des n -Ecks verläuft, dies ist immer möglich. Die Punkte E_A und E_C wählen wir auf den beiden von E_S ausgehenden Schenkeln genügend nahe bei E_S , dann ist das $(n+2)$ -Eck $E_1 \dots E_A E_B E_C \dots E_n$ überschneidungsfrei und es hat bei E_A und E_C zwei spitze Innenwinkel, alle anderen spitzen Innenwinkel bleiben erhalten. Da der Innenwinkel bei der verschwundenen Ecke E_S stumpf ist, enthält das $(n+2)$ -Eck genau zwei spitze Innenwinkel mehr als das n -Eck.

Nun zum eigentlichen Beweis mit vollständiger Induktion. Den Induktionsschluss führen wir von n auf $n + 3$, entsprechend benötigen wir einen Induktionsanfang für $n = 3, n = 4$ und $n = 5$:

Induktionsanfang: Die Aussage ist richtig für $n = 3, n = 4$ und $n = 5$:

$n = 3$: Es gibt 3-Ecke mit $S(3) = \left\lfloor \frac{2}{3} \cdot 3 \right\rfloor + 1 = 3$ spitzen Innenwinkel: Jedes spitzwinklige Dreieck hat diese Eigenschaft.

$n = 4$: Es gibt Vierecke mit $S(4) = \left\lfloor \frac{2}{3} \cdot 4 \right\rfloor + 1$ spitzen Innenwinkeln: Nach HS 1 kann man aus

jedem Dreieck mit $S(3) = 3$ spitzen Innenwinkeln ein 4-Eck mit $3 = \left\lfloor \frac{2}{3} \cdot 4 \right\rfloor + 1 = S(4)$

spitzen Innenwinkeln und einem stumpfen Innenwinkel konstruieren. (Man könnte auch ein konkretes Viereck angeben, z.B. ein Viereck mit Innenwinkeln von $70^\circ, 70^\circ, 70^\circ$ und 150° .)



$n = 5$: Es gibt 5-Ecke mit $S(5) = \left\lfloor \frac{2}{3} \cdot 5 \right\rfloor + 1$ spitzen Innenwinkeln: Die im HS 2 beschriebene Konstruktion kann man auch an einer Ecke mit spitzem Innenwinkel durchführen. Dann nimmt die Eckenzahl ebenfalls um 2 Ecken zu, die Anzahl der spitzen Innenwinkel nimmt allerdings nur um 1 zu, da an der verschwundenen Ecke ein spitzer Innenwinkel war. Also kann man aus jedem 3-Eck mit 3 spitzen Innenwinkeln ein 5-Eck mit $4 = \left\lfloor \frac{2}{3} \cdot 5 \right\rfloor + 1 = S(5)$ spitzen Innenwinkeln konstruieren. (Man könnte auch ein konkretes Fünfeck angeben, z.B. mit Innenwinkeln von $80^\circ, 20^\circ, 340^\circ, 20^\circ, 80^\circ$).

Induktionsvoraussetzung: Die Aussage sei richtig für drei Zahlen n mit $n \equiv 0 \pmod{3}$, $n \equiv 1 \pmod{3}$ und $n \equiv 2 \pmod{3}$, d.h. es gebe jeweils ein n -Eck mit $S(n)$ spitzen Innenwinkeln.

Induktionsschluss: Dann ist die Aussage richtig für jeweils $n + 3$: Wendet man HS1 und HS 2 hintereinander auf ein n -Eck mit $S(n)$ spitzen Innenwinkeln an, so erhält man ein $(n + 3)$ -Eck mit

$$S(n) + 2 = \left\lfloor \frac{2}{3} \cdot n \right\rfloor + 1 + 2 = \left\lfloor \frac{2}{3} \cdot (n+2) \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{2}{3} \cdot (n+3) \right\rfloor + 1 = S(n+3)$$

spitzen Innenwinkeln.

Bemerkungen: Den konkreten Einzelfall $n = 2017$ kann man mit "unvollständiger" Induktion beweisen: Man beginnt mit einem Viereck mit einem stumpfen und drei spitzen Innenwinkeln und führt den Induktionsschritt (also die Kombination aus HS 1 und HS 2) insgesamt 671 Mal durch. Da $4 + 671 \cdot 3 = 2017$ und $3 + 671 \cdot 2 = 1345$, erhält man ein 2017-Eck mit 1345 spitzen Innenwinkeln.

Die mittlere Figur im ersten Beweis beschreibt letztlich auch einen direkten Zugang: Man beginnt mit einer "Viertelkreistorte" $SE_2E_3E_6E_9 \dots E_{3m}E_{3m+1}$ – dies ist ein $(m+3)$ -Eck mit stumpfen Innenwinkeln bei den $m-1$ Ecken E_{3i} ($1 \leq i < m$) – und ersetzt nach HS 2 jede dieser Ecken durch drei Ecken mit Spitze $E_{3i}E_{3i+1}E_{3i+2}$.

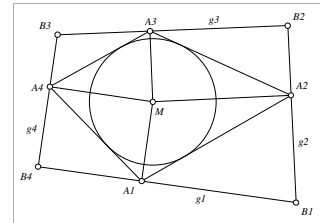


Aufgabe 3: In einem konvexen Tangentenviereck $A_1A_2A_3A_4$ sei M der Mittelpunkt des Inkreises, der die Seiten des Vierecks berührt. Weiter sei g_1 die Gerade durch A_1 , die senkrecht auf der Strecke A_1M steht; entsprechend seien g_2, g_3 und g_4 festgelegt. Die Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 bestimmen ein weiteres Viereck $B_1B_2B_3B_4$, wobei B_1 der Schnittpunkt von g_1 und g_2 ist; entsprechend bezeichnet B_2, B_3 bzw. B_4 den Schnittpunkt von g_2 und g_3, g_3 und g_4 bzw. g_4 und g_1 .

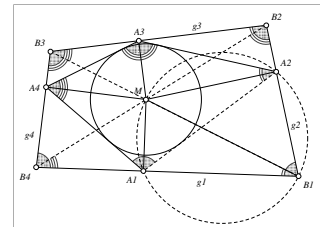
Beweise, dass sich die Diagonalen des Vierecks $B_1B_2B_3B_4$ im Punkt M schneiden.

Vorbemerkung: Der Originalausschreibung war noch nebenstehende Figur beigelegt.

Die zu beweisende Aussage gilt für jedes Viereck, bei dem die Trägergeraden der Seiten Tangenten an einen gemeinsamen Kreis sind. Die zusätzliche Voraussetzung, dass das betrachtete Tangentenviereck konvex sein muss, wurde eingefügt, um in den Beweisen nicht jeden der 5 topologisch verschiedenen Fälle gesondert betrachten zu müssen. Der 3. Beweis gilt auch ohne weitere Überlegung für alle diese Fälle.



1. Beweis (Umfangswinkelsatz): Die Geraden A_1A_2 und A_1A_4 sind Tangenten an den Inkreis des Vierecks $A_1A_2A_3A_4$ vom gemeinsamen Punkt A_1 aus. Sie liegen deswegen symmetrisch bezüglich der Geraden A_1M , d.h. es ist $\angle A_2A_1M = \angle MA_1A_4$; und somit ist A_1M Winkelhalbierende von $\angle A_2A_1A_4$.



Nach Konstruktion sind im Viereck $MA_1B_1A_2$ bei den gegenüberliegenden Ecken A_1 und A_2 rechte Winkel. Also ist dieses Viereck ein Sehnenviereck (der Umkreis hat den Durchmesser MB_1); hieraus folgt nach Umfangswinkelsatz über der Sehne A_2M , dass $\angle A_2A_1M = \angle A_2B_1M$. Bei Betrachten des Vierecks $MA_1B_4A_4$ folgt mit analoger Begründung, dass $\angle MA_1A_4 = \angle MB_4A_4$. Der Winkel $\alpha_1 := \angle A_2A_1M$ taucht also in der Figur vier Mal auf, in der Figur mit jeweils genau einer Markierungslinie gekennzeichnet.

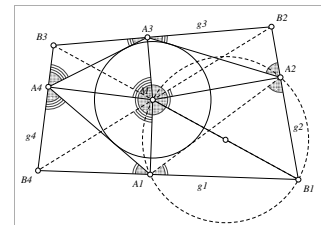
Entsprechend seien $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ definiert, mit entsprechender Beweisführung (man vertausche die Indices zyklisch) zeigen wir, dass die Winkel α_2, α_3 und α_4 ebenfalls jeweils vier Mal in der Figur auftauchen (die Anzahl der Markierungslinien entspricht jeweils dem Index). Gleichzeitig bilden je zwei von ihnen die Innenwinkel des Vierecks $A_1A_2A_3A_4$, es ist also $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$.

Nun betrachten wir das Viereck $B_1MB_3B_4$. Für seine Innenwinkelsumme gilt

$$360^\circ = \alpha_2 + \angle B_3MB_1 + \alpha_3 + (\alpha_1 + \alpha_4) = \angle B_3MB_1 + 180^\circ,$$

hieraus folgt unmittelbar $\angle B_3MB_1 = 180^\circ$, d.h. dass M auf der Diagonalen B_1B_3 liegt. Analog beweist man, dass M auf der Diagonalen B_2B_4 liegt; damit ist alles gezeigt.

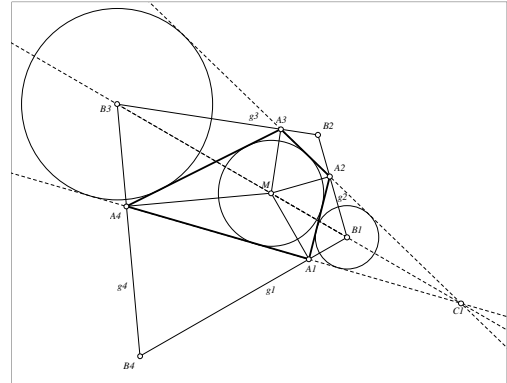
Variante: In der (fast) selbsterklärenden Figur rechts sind wieder gleich viele Winkel mit gleicher Anzahl von Markierungslinien gekennzeichnet. Zum Beweis verwenden wir die gleichen Argumente wie oben (Symmetrie bez. Gerade MA_1 ; $A_1B_1A_2M$ ist ein Sehnenviereck). Also ist $\angle B_1MB_3 = \angle B_3MB_1 = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$.



Bemerkung: Das Viereck $B_1B_2B_3B_4$ ist ein Sehnenviereck, da die Summe der Innenwinkel an den gegenüberliegenden Ecken 180° beträgt.



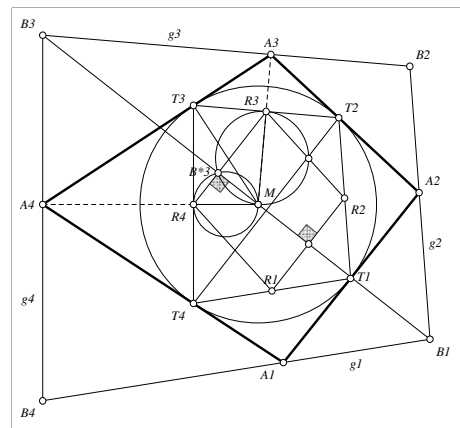
2. Beweis (Ankreise an Dreiecke): Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Geraden A_1A_4 und A_2A_3 nicht parallel sind. Ihr Schnittpunkt sei mit C_1 bezeichnet; wir nehmen zusätzlich an, dass C_1 auf den Halbgeraden $[A_4A_1]$ und $[A_3A_2]$ liegt. Dann ist der Inkreis des Vierecks $A_1A_2A_3A_4$ auch Inkreis des Dreiecks $A_3C_1A_4$, d.h. die Geraden A_4M und A_3M sind Winkelhalbierende in diesem Dreieck. Weiter ist $B_3B_2 \perp A_3M$ und $B_4B_3 \perp A_4M$, also sind B_3B_2 und B_3B_4 Außenwinkelhalbierende im Dreieck $A_4C_1A_3$ und somit ist B_3 Mittelpunkt des Ankreises. Schließlich steht B_2B_1 senkrecht auf der Winkelhalbierenden A_2M , also ist A_2B_1 Winkelhalbierende des Nebenwinkels $C_1A_2A_1$. Mit analoger Begründung zeigt man, dass auch A_1B_1 Winkelhalbierende im Dreieck $A_1C_1A_2$ ist. Ihr Schnittpunkt B_1 ist demnach Inkreismitelpunkt im Dreieck $A_1C_1A_2$.



Schließlich berühren diese drei Kreise alle die Geraden A_1A_4 und A_2A_3 , ihre Mittelpunkte B_1 , M und B_3 liegen also auf der Winkelhalbierenden des durch diese beiden Geraden gebildeten Winkels. Hieraus folgt sofort, dass M auf der Geraden B_1B_3 liegt.

Falls die Geraden A_1A_4 und A_2A_3 parallel sind oder ihr Schnittpunkt "auf der anderen Seite" liegt, können wir analog argumentieren, evtl. müssen wir an geeigneter Stelle das Wort "Winkelhalbierende" durch "Mittelparallele" ersetzen. In analoger Weise begründen wir auch, dass M auf B_2B_4 liegt.

3. Beweis (Kreisspiegelung) Mit T_i ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) sei der Berührungspunkt des Inkreises an der Seite A_iA_{i+1} bezeichnet, mit R_i der Mittelpunkt der Strecke $T_{i-1}T_i$. Nach Strahlensatz ist dann $R_1R_2 \parallel T_4T_2 \parallel R_4R_3$ und $R_2R_3 \parallel T_1T_3 \parallel R_1R_4$. Da T_3 und T_4 die Berührungspunkte der beiden Tangenten von A_4 an den Inkreis sind, ist R_4 der Schnittpunkt der Seite T_3T_4 mit A_4M , ferner stehen die beiden Geraden senkrecht aufeinander. Entsprechendes gilt für alle Seiten T_iT_{i+1} .



Nun betrachten wir die Inversion am Inkreis des vorgegebenen Tangentenvierecks, dabei setzen wir als bekannt voraus: Bei dieser Abbildung ist jeder Punkt des Kreises ein Fixpunkt, jede Gerade durch M eine Fixgerade, das Bild eines Punktes X außerhalb des Spiegelkreises der Schnittpunkt der Zentralen XM mit der Verbindungsgeraden der Berührungspunkte der Tangenten von X an den Spiegelkreis, schließlich ist die Abbildung winkeltreu und eineindeutig auf der Menge der Punkte in der Ebene ohne M . Im Zusammenhang mit unserer Aufgabe ist also das Bild von A_i der Punkt R_i , und das Bild der Geraden $g_i = B_{i-1}B_i$ ist der Kreis mit Durchmesser R_iM .

Sei B^*_3 der von M verschiedene Schnittpunkt der Kreise über den Durchmessern R_3M und R_4M . Dieser Punkt muss demnach das Bild der Schnittpunkte der Urbilder dieser Kreise sein, also der Geraden g_3 und g_4 , also das Bild von B_3 . Insbesondere liegt dieser Schnittpunkt auf B_3M , und nach dem Satz des Thales ist $\angle R_4B^*_3M = \angle MB^*_3R_3 = 90^\circ$, also $B_3M \perp R_3R_4$. Da zudem $T_4T_2 \parallel R_4R_3$, gilt $B_3M \perp T_2T_4$.

Mit analoger Argumentation zeigen wir, dass auch $B_1M \perp T_2T_4$, daraus folgt sofort, dass M auf der Geraden B_1B_3 liegt; und schließlich gilt dies auch für die Gerade B_2B_4 .



4. Beweis: Mit T_i ($i \in 1, 2, 3, 4$) sei der Berührungspunkt des Inkreises an der Seite $A_i A_{i+1}$ bezeichnet, mit R_i der Mittelpunkt der Strecke $T_{i-1} T_i$; o.B.d.A. sei der Radius des Inkreises 1. Wir werden zeigen, dass $B_3 M \perp T_2 T_4$ ist; mit analoger Schlussweise erhalten wir, dass auch $B_1 M \perp T_2 T_4$ ist, d.h. dass M auf der Geraden $B_3 B_1$ liegt. Wieder mit analoger Schlussweise folgt $B_4 M \perp T_1 T_3$ und $B_2 M \perp T_1 T_3$, und hieraus die restliche Behauptung.

Die Dreiecke $MT_3 A_3$ und $MR_3 T_3$ haben beide einen 90° -Winkel und den Winkel bei M gemeinsam; entsprechendes gilt für die Dreiecke $MT_3 A_4$ und $MR_4 T_3$.

Sie sind also ähnlich und es gilt $\frac{\overline{MA_3}}{\overline{MT_3}} = \frac{\overline{MT_3}}{\overline{MR_3}}$, mit

$\overline{MT_3} = 1$ erhalten wir $\overline{MR_3} \cdot \overline{MA_3} = 1^2 = 1$ und analog $\overline{MR_4} \cdot \overline{MA_4} = 1$. Dies schreiben wir um zu $\frac{\overline{MA_3}}{\overline{MA_4}} = \frac{\overline{MR_4}}{\overline{MR_3}}$; und da die beiden Dreiecke $A_4 M A_3$ und $R_3 M R_4$ den gleichen Winkel bei M haben, folgt, dass sie ähnlich sind.

Die Spiegelung an der Winkelhalbierenden von $\angle A_3 M A_4$ führt die Halbgerade $[MR_3$ auf die Halbgerade $[MR_4$ über und bringt das Dreieck $R_3 M R_4$ in eine Lage $R_3' M R_4'$, in der eine zentrische Streckung mit Zentrum M und Streckfaktor $k := \overline{MA_4} : \overline{MR_3'}$ es in das Dreieck $A_4 M A_3$ überführt.

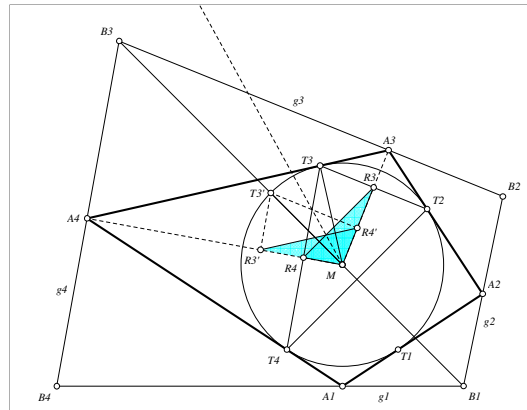
Die Lage des Punktes T_3 ist eindeutig bestimmt als der Schnittpunkt der Lote von R_3 bzw. R_4 auf MA_3 bzw. MA_4 . Entsprechendes gilt für die Spiegelbilder. Nun ist auch der Punkt B_3 definiert als Schnittpunkt der Lote auf MA_3 bzw. MA_4 durch A_3 bzw. A_4 . Da die oben angegebene zentrische Streckung die Strecke $R_3 R_4'$ auf die Strecke $A_4 A_3$ und Lote auf Geraden durch M wieder auf Lote auf diesen Geraden überführt, ist B_3 das Bild von T_3' bei dieser zentr. Streckung, d.h. T_3' liegt auf der Geraden MB_3 . Insbesondere ist nun $R_3' T_3' \perp A_4 M$ und $\overline{R_3' T_3'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{T_2 T_3}$ und $R_4' T_3' \perp A_3 M$ und $\overline{R_4' T_3'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{T_3 T_4}$.

Nun zeigen wir $MB_3 \perp T_2 T_4$ mit Hilfe von Vektorrechnung. Fett gedruckte Variable bezeichnen Vektoren, wir wählen M als Ursprung und identifizieren wie üblich Punkte mit ihren Ortsvektoren und verwenden die Tatsache, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren mit positiver Länge genau dann den Wert 0 hat, wenn die Vektoren senkrecht aufeinander stehen, und dass $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$ für kollineare Vektoren gleicher Richtung und $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$ für kollineare Vektoren entgegengesetzter Richtung.

Es ist $\overline{A_3 B_3} = k \cdot (\mathbf{t}_3' - \mathbf{r}_4')$ und $\overline{A_4 B_3} = k \cdot (\mathbf{t}_3' - \mathbf{r}_3')$, wobei k der Streckfaktor der oben beschriebenen zentrischen Streckung ist. Eine Rechnung ergibt nun

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_3 \circ (\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_4) &= \mathbf{b}_3 \circ (\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_3 + \mathbf{t}_3 - \mathbf{t}_4) &= \mathbf{b}_3 \circ (\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_3) + \mathbf{b}_3 \circ (\mathbf{t}_3 - \mathbf{t}_4) \\ &= (\mathbf{a}_3 + \overline{A_3 B_3}) \circ (\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_3) + (\mathbf{a}_4 + \overline{A_4 B_3}) \circ (\mathbf{t}_3 - \mathbf{t}_4) \\ &= \mathbf{a}_3 \circ (\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_3) + k \cdot (\mathbf{t}_3' - \mathbf{r}_4') \circ (\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_3) + \mathbf{a}_4 \circ (\mathbf{t}_3 - \mathbf{t}_4) + k \cdot (\mathbf{t}_3' - \mathbf{r}_3') \circ (\mathbf{t}_3 - \mathbf{t}_4) \\ &= 0 - k \cdot \frac{1}{2} |\mathbf{t}_3 - \mathbf{t}_4| \cdot |\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_3| + 0 + k \cdot \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{t}_3 - \mathbf{t}_2| \cdot |\mathbf{t}_3 - \mathbf{t}_4| = 0, \end{aligned}$$

das war zu zeigen.





Aufgabe 4: Die Zahlenfolge a_0, a_1, a_2, \dots sei rekursiv definiert durch die Vorschrift

$$a_0 := 1 \quad \text{und} \quad a_n := a_{n-1} \cdot \left(4 - \frac{2}{n}\right) \quad \text{für } n \geq 1.$$

Beweise, dass für jedes $n \geq 1$ gilt:

- a_n ist eine natürliche Zahl.
- Jede Primzahl p mit $n < p \leq 2n$ ist Teiler von a_n .
- Wenn n eine Primzahl ist, dann ist $a_n - 2$ durch n teilbar.

Vorbemerkung: Folgende expliziten Darstellungen von a_n sind u.a. möglich:

$$a_n = \binom{2n}{n} = 2 \cdot \binom{2n-1}{n-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = 2^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}.$$

Arbeitet man mit dem 2. Term (man erhält ihn aus dem ersten nach Kürzen mit n), so sind manche Überlegungen einfacher, evtl. muss allerdings der Fall $n = 1$ gesondert behandelt werden (leeres Produkt!). Mit der dritten Darstellung lässt sich die Behauptung der Teilaufgabe c) direkt beweisen, mit der vierten kann man ohne Bezug auf Binomialkoeffizienten arbeiten).

1. Beweis: Wir zeigen zunächst mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 1$ gilt:

$$a_n = \binom{2n}{n} = \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}$$

$$(\text{Kürzen mit } n \text{ führt zu } a_n = 2 \cdot \frac{(2n-1) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)} = 2 \cdot \binom{2n-1}{n-1}.)$$

Induktionsanfang: Für $n = 1$ erhalten wir $a_1 = \binom{2 \cdot 1}{1} = \frac{2}{1} = 2 = 1 \cdot (4 - 2/1)$.

Induktionsvoraussetzung: Für ein bestimmtes $n \geq 1$ gelte

$$a_n = \binom{2n}{n} = \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}.$$

Induktionsschluss: Dann ist auch

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n \cdot \left(4 - \frac{2}{n+1}\right) = \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot (n+2) \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \cdot \frac{4n+4-2}{n+1} \\ &= \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot (n+2) \cdot ((n+1) \cdot (4n+2))}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)} \\ &= \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot (n+2) \cdot (2 \cdot (n+1)) \cdot (2(n+1)-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)} = \binom{2(n+1)}{n+1}. \end{aligned}$$

Nun zum Beweis der Teilaussagen:

zu a): Bekanntlich sind alle Binomialkoeffizienten ganzzahlig, dies gilt insbesondere auch für alle a_n .

Variante 1: Bekanntlich können die Binomialkoeffizienten als Summen von ganzen Zahlen dargestellt werden (Pascaldreieck!), also sind alle Binomialkoeffizienten ganzzahlig, insbesondere alle a_n .



zu b): Falls $n = 1$, ist $a_n = 2$. Einzige Primzahl p mit $1 < p \leq 2 \cdot 1 = 2$ ist 2, und es gilt tatsächlich $2|2$. Falls $n > 1$, betrachten wir eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$. Da $2n$ sicher keine Primzahl ist, gilt schärfer $n < p < 2n$; dann steht p als Faktor im Zähler des Bruches

$$a_n = \binom{2n}{n} = \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}.$$

Da $p > n$, hat keiner der Faktoren $1, \dots, n$ im Nenner einen gemeinsamen Teiler $t > 1$ mit p . Das bedeutet aber, dass bei einem vollständigen Kürzen des Bruches der Faktor p im Zähler stehen bleibt, also Teiler von a_n ist.

zu c): Es sei p eine Primzahl. Dann gilt (2 ausklammern, mit p kürzen, zusammenfassen)

$$\begin{aligned} a_p - 2 &= \frac{2p \cdot (2p-1) \cdot (2p-2) \cdot \dots \cdot (p+2) \cdot (p+1) - 2 \cdot p!}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p} \\ &= 2 \cdot \frac{(2p-1) \cdot (2p-2) \cdot \dots \cdot (p+2) \cdot (p+1) - (p-1)!}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1)}. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir den Zähler: Es ist $(2p - k) \equiv (p - k) \pmod{p}$ für alle ganzzahligen k , also gilt

$$(2p-1) \cdot (2p-2) \cdot (2p-3) \cdot \dots \cdot (2p-(p-1)) - (p-1)! \equiv (p-1)! - (p-1)! \equiv 0 \pmod{p}.$$

Das bedeutet, dass der Zähler durch p teilbar ist, d.h. dass $a_p - 2 = \frac{K \cdot p}{(p-1)!}$ für ein geeignetes

ganzzahliges K . Weil p eine Primzahl ist und größer als jeder Faktor im Nenner, hat keiner dieser Faktoren im Nenner einen gemeinsamen Teiler mit p , der größer als 1 ist. Beim Kürzen bleibt also der Faktor p im Zähler erhalten; und weil mit a_p auch $a_p - 2$ eine ganze Zahl ist, wird der Bruch vollständig gekürzt, also ist $a_p - 2$ durch p teilbar.

Variante: Dass der Zähler durch p teilbar ist, kann man auch ohne Modulrechnung nachweisen: Das erste Produkt im Zähler hat $p-1$ Faktoren, wir schreiben es in der Form

$$(2p-1) \cdot (2p-2) \cdot (2p-3) \cdot \dots \cdot (2p-(p-1)) = (p+(p-1)) \cdot (p+(p-2)) \cdot (p+(p-3)) \cdot \dots \cdot (p+1).$$

Multipliziert man nun nach der Regel "jeden Summanden jeder Klammer mit jedem Summanden jeder anderen Klammer" aus, so erhält man 2^{p-1} Produkte als Summanden; eines davon hat die Form $(p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3) \cdot \dots \cdot 1 = (p-1)!$ und verschwindet in der Summe; alle anderen Produkte haben die Form $p^k \cdot (p-r) \cdot (p-s) \cdot \dots \cdot (p-t)$ mit $1 \leq k \leq p-1$. Somit kann man im Zähler den Faktor p ausklammern.

Beweisvariante zu c): Über die Aufgabenstellung hinaus kann man zeigen, dass sogar p^2 Teiler von $a_p - 2$ ist. Es ist nämlich $a_p - 2 = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k}^2 - 2 = \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k}^2$ für alle positiven ganzen Zahlen p . (Ein Beweis hierfür gelingt z.B. mit Vandermondeschen Identität.) Wie oben zeigt man, dass für alle $1 \leq k \leq (p-1)$ im Ausdruck $\binom{p}{k} = \frac{p \cdot (p-1) \cdot \dots \cdot (p-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$ der Faktor p im Zähler enthalten ist, aber nicht im Nenner. Wenn nun p prim ist, dann hat p mit keinem der Faktoren im Nenner einen gemeinsamen Teiler $t > 1$, d.h. p bleibt beim Kürzen vollständig enthalten. Mit $p | \binom{p}{k}$ gilt auch $p^2 | \binom{p}{k}^2$, damit ist $a_p - 2$ eine Summe ganzer Zahlen, von denen jede durch p^2 teilbar ist, also auch $a_p - 2$ selbst.

Bemerkung: Nach dem Satz von Wolstenholme gilt sogar: p prim und $p \geq 5 \Rightarrow p^3 | (a_p - 2)$.

Quelle z.B.: <https://homepage.univie.ac.at/johann.cigler/preprints/wolst.pdf>.