

Aufgaben und Lösungen

2. Runde 2017

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: 23. Oktober 2017

GEFÖRDERT VOM



Bundesministerium
für Bildung
und Forschung



STIFTERVERBAND



KULTUSMINISTER
KONFERENZ

**Aufgabe 1:**

Von den natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots, n+1$ soll man eine streichen und die übrigen so in einer Folge a_1, a_2, \dots, a_n anordnen, dass von den n Zahlen $|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, \dots, |a_{n-1} - a_n|, |a_n - a_1|$ keine zwei gleich sind.

Für welche natürlichen Zahlen $n \geq 4$ ist dies möglich?

Anmerkung: Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Antwort: Falls $n \equiv 0 \pmod{4}$ oder $n \equiv -1 \pmod{4}$ ist dies möglich, für alle anderen n ist dies nicht möglich.

1. Beweis:

Teil 1: Wir zeigen, dass $n \equiv 0 \pmod{4}$ oder $n \equiv -1 \pmod{4}$ eine notwendige Bedingung dafür ist, dass die geforderte Streichung und Anordnung möglich ist.

Sei das Streichen einer Zahl eine Anordnung wie in der Aufgabe verlangt möglich. Für zwei beliebige Zahlen a_i und a_j ($i \neq j$) aus der Menge $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ gilt stets $1 \leq |a_i - a_j| \leq n$, d.h. die $|a_i - a_j|$ können höchstens n verschiedene Werte annehmen. Da wir n solche Differenzen betrachten und diese nach Voraussetzung n verschiedene Werte annehmen, nehmen die $|a_i - a_j|$ jeden der Werte $1, 2, \dots, n$ genau einmal an. Die Gesamtsumme aller dieser Differenzen beträgt demnach

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Wir überlegen uns, ob diese Gesamtsumme gerade oder ungerade ist: Offensichtlich sind $|a_i - a_j|$ und $(a_i - a_j)$ entweder beide gerade oder beide ungerade. Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} &= |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_n - a_1| \\ &\equiv (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_n - a_1) \equiv a_1 - a_1 \equiv 0 \pmod{2}, \end{aligned}$$

d.h. $\frac{n(n+1)}{2}$ ist gerade. Da im Zähler von den aufeinander folgenden Zahlen n und $n+1$ eine gerade und die andere ungerade ist, muss die gerade Zahl sogar durch 4 teilbar sein, da sonst bei dem Bruch nach dem Kürzen keine gerade Zahl übrig bleibt. Hieraus folgt sofort $n \equiv 0 \pmod{4}$ oder $n+1 \equiv 0 \pmod{4}$, letzteres ist äquivalent zu $n \equiv -1 \pmod{4}$.

Teil 2: Wir zeigen, dass $n \equiv 0 \pmod{4}$ oder $n \equiv -1 \pmod{4}$ eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass es eine Streichung und Anordnung gibt, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt:

Falls $n \equiv 0 \pmod{4}$ oder $n \equiv -1 \pmod{4}$, ist $n = 4k$ bzw. $n = 4k - 1$ für ein geeignetes ganzzahliges positives k , d.h. es ist $k = n/4$ bzw. $k = (n+1)/4$.

Für den Fall $n \equiv 0 \pmod{4}$, also für $n = 4k$ (also $2k = n/2$) definieren wir

$$a_{1+2i} = \begin{cases} 2k-i+1 & \text{für } 0 \leq i \leq k-1 \\ 2k-i & \text{für } k \leq i \leq 2k-1 \end{cases}$$

$$a_{2i} = 2k+i+1 \quad \text{für } 1 \leq i \leq k.$$

Dann durchlaufen die a_j

mit ungeradem Index die ganzen Zahlen $2k+1, 2k, 2k-1, \dots, k+2, k, k-1, \dots, 1$, also alle ganzen Zahlen von 1 bis $n/2+1$ mit Ausnahme der Zahl $n/4+1 = k+1$,

mit geradem Index die ganzen Zahlen $2k+2, 2k+3, \dots, n+1$, also alle Zahlen von $n/2+2$ bis $n+1$.



Insgesamt haben wir also von den Zahlen $1, 2, 3, \dots, n + 1$ die Zahl $k + 1$ gestrichen und die übrigen in der durch die Indices gegebene Reihenfolge neu angeordnet.

Beispiel für $n = 16 \equiv 0 \pmod 4$; $k = 4$; streiche $k + 1 = 5$:

n	16	15	14	13	12	11	10	9	2k=8	7	6	5	4	3	2	1	17
a_n	17	1	16	2	15	3	14	4	13	6	12	7	11	8	10	9	-
$ a_n - a_{n+1} $	16	15	14	13	12	11	10	9	7	6	5	4	3	2	1	8	-

Bemerkung: In der Tabelle kann man in der obersten Zeile die Indices auch in umgekehrter Reihenfolge eintragen. Für die Beschreibung der Zuordnung benötigt man dann aber Brüche, was zur besseren Lesbarkeit vermieden wird.

Es bleibt zu zeigen, dass die Beträge der Differenzen alle verschieden sind (wir bemerken noch, dass wegen $n \equiv 0 \pmod 4$ die Zahl $n/2$ ganz und gerade ist):

$$\begin{aligned}
 \text{Es ist } |a_n - a_1| &= |(n + 1) - (2k + 1)| = n/2, \\
 |a_{2i} - a_{1+2i}| &= |2k + i + 1 - (2k - i + 1)| = 2i \quad \text{für } 1 \leq i \leq k - 1, \\
 &\quad \text{das sind alle geraden Zahlen } 2, 4, \dots, n/2 - 2, \\
 |a_{2i} - a_{1+2i}| &= |2k + i + 1 - (2k - i)| = 2i + 1 \quad \text{für } k \leq i \leq 2k - 1, \\
 &\quad \text{das sind alle ungeraden Zahlen } n/2 + 1, n/2 + 3, \dots, n - 1, \\
 |a_{1+2i} - a_{2i+2}| &= |2k - i + 1 - (2k + i + 1 + 1)| = 2i + 1 \quad \text{für } 0 \leq i \leq k - 1, \\
 &\quad \text{das sind alle ungeraden Zahlen } 1, 3, \dots, n/2 - 1, \\
 |a_{1+2i} - a_{2(i+1)}| &= |2k - i - (2k + i + 1 + 1)| = 2i + 2 \quad \text{für } k \leq i \leq 2k - 1, \\
 &\quad \text{das sind alle geraden Zahlen } n/2 + 2, n/2 + 4, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass die a_i genau die Zahlen $1, 2, \dots, n$ umfassen. Also sind keine zwei gleich.

Für den Fall $n \equiv -1 \pmod 4$, also für $n = 4k - 1$ definieren wir

$$\begin{aligned}
 a_{2i} &= \begin{cases} 2k - i & \text{für } 0 \leq i \leq k - 1 \\ 2k - i - 1 & \text{für } k \leq i \leq 2k - 1 \end{cases} \\
 a_{1+2i} &= 2k + 1 + i \quad \text{für } 1 \leq i \leq k.
 \end{aligned}$$

Beispiel für $n = 15 \equiv -1 \pmod 4$; $k = 4$; streiche $k + 1 = 5$:

n	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	16
a_n	16	1	15	2	14	3	13	4	12	6	11	7	10	8	9	-
$ a_n - a_{n+1} $	15	14	13	12	11	10	9	8	6	5	4	3	2	1	7	-

Die Nachweise werden analog geführt; in einer vollständigen Lösung müssen sie ausgeführt werden. Aus Platzgründen wird hier darauf verzichtet.

**Aufgabe 2:**

In einem konvexen regulären 35-Eck sind 15 Ecken rot gefärbt. Gibt es bei jeder solchen Färbung unter den 15 roten Ecken drei Ecken, die ein gleichschenkliges Dreieck bilden?

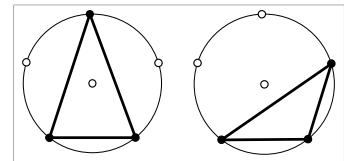
Anmerkung: Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

Antwort: Bei jeder solchen Färbung gibt es ein gleichschenkliges Dreieck mit drei roten Ecken.

Bemerkung: Die Aussage bleibt richtig, wenn man die Zahl 15 durch die Zahl 10 ersetzt; dabei ist die Zahl 10 die kleinste solche Zahl; d.h. es man kann von den 35 Eckpunkten 9 Punkten so rot färben, dass unter ihnen keine drei eine gleichschenkliges Dreieck bilden.

Mit Eckpunkten sind immer die Eckpunkte des regelmäßigen 35-Ecks gemeint, mit Verbindungsstrecke immer Verbindungsstrecke zweier Eckpunkte, mit Dreieck immer ein Dreieck, dessen Eckpunkte auch Eckpunkte des 35-Ecks sind. Wir reden von einer "roten Verbindungsstrecke" und von einem "roten Dreieck", wenn beide Endpunkte der Verbindungsstrecke bzw. alle drei Ecken des Dreiecks rot gefärbte Eckpunkte sind.

1. Beweis: Da $35 = 5 \cdot 7$, gibt es genau 7 reguläre Fünfecke, deren Ecken auch Ecken des regulären 35-Ecks sind. Da $15 : 7 > 2$, gibt es unter diesen 7 Fünfecken mindestens eines, in dem mindestens drei Eckpunkte rot gefärbt sind. Dies kann nur auf zwei wesentlich verschiedene Arten geschehen: Da $3 \cdot 2 = 6 > 5$, gibt es sicher zwei rot gefärbte Ecken, die benachbart liegen. Entweder sind also alle drei roten Ecken benachbart oder es sind zwei rote Ecken benachbart und zwischen diesen beiden roten Ecken und der dritten liegt jeweils genau eine nicht gefärbte Ecke. In beiden solchen Fällen bilden die drei roten Ecken ein gleichschenkliges Dreieck (wie man sich auch ohne Skizze im Kopf klar macht).



2. Beweis (einfaches Abzählen führt zu einem Widerspruch): Wir nehmen an, dass unter den 15 rot gefärbten Ecken keine drei sind, die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks sind. Wir nummerieren die Ecken des 35-Ecks fortlaufend im Uhrzeigersinn mit $-17, -16, -15, \dots, -1, 0, 1, \dots, 17$; o.B.d.A. sei die Ecke 0 rot gefärbt.

Die Ecken $0, k$ und $-k$ ($k \in \{-17, -16, \dots, 17\}$) bestimmen ein gleichschenkliges Dreieck mit Spitze bei der Ecke 0, also kann für jedes k von den beiden Ecken $\pm k$ höchstens eine gefärbt sein. Von den Ecken $\pm 8, \pm 9, \pm 11, \pm 13, \pm 16$ und ± 17 können also höchstens 6 gefärbt sein. Auch die Ecken $0, k$ und $2k$ bilden ein gleichschenkliges Dreieck, hier ist die Ecke k die Spitze. Einfaches Ausprobieren zeigt nun, dass dann von den sechs Ecken $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ höchstens zwei rot gefärbt sein können, ohne dass ein gleichschenkliges Dreieck entsteht (man beachte, dass auch das Dreieck mit den Ecken $-2, 1, 4$ gleichschenkelig ist). Das gleiche gilt für die Ecken $\pm k, \pm 2k, \pm 4k$, insbesondere also für Ecken $\pm 3, \pm 6, \pm 12$, sowie Ecken $\pm 5, \pm 10, \mp 15$. Von den Ecken ± 7 und ± 14 kann höchstens eine rot gefärbt sein (sonst wären 3 Ecken eines regulären Fünfecks rot gefärbt; diese bilden immer ein gleichschenkliges Dreieck). Somit haben wir alle Ecken betrachtet, es sind einschl. der Ecke 0 also höchstens $1 + 6 + 3 \cdot 2 + 1 = 14$ gefärbt, was im Widerspruch zur Voraussetzung in der Aufgabe steht.

Bemerkung: Wenn man die Ecken $\pm k, \pm 2k, \pm 4k, \pm 8k, \pm 16k \dots$ betrachtet, erhält man ein schärferes Resultat, vgl. 3. Beweis.

Variante des 2. Beweises: Wir nehmen an, dass 15 Ecken rot gefärbt sind und dass keine drei Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks sind.

Wir nummerieren die Ecken im Uhrzeigersinn fortlaufend mit $0, 1, \dots, 34$. Als Länge der Verbindungsstrecke der Ecken a und b definieren wir $d(a,b) = \min\{|a - b|, 35 - |a - b|\}$, d.h. die kleinere Anzahl der Seiten des 35-Ecks zwischen den Endpunkten der Verbindungsstrecke. Damit sind die 17 Zahlen $1, 2, \dots, 17$ genau die möglichen Längen von Verbindungsstrecken zweier Eckpunkte des 35-Ecks.



O.B.d.A. sei die Ecke 0 rot gefärbt. Sie ist Endpunkt von 14 Verbindungsstrecken mit den übrigen 14 rot gefärbten Punkten. Nach Annahme haben keine zwei dieser Verbindungsstrecken gleiche Länge, d.h. von der Ecke 0 gehen 14 Verbindungsstrecken mit 14 verschiedenen Längen aus.

Von den Längen 5, 10 und 15 können höchstens zwei Längen vorkommen, weil sonst im regulären 7-Eck mit den Ecken 0, 5, 10, 15, 20, 25 und 30 vier Eckpunkte rot gefärbt wären, was immer ein gleichschenkliges Dreiecke enthielte. Von den Längen 7 und 14 kann höchstes eine Länge vorkommen, weil sonst im regulären 5-Eck mit den Ecken 0, 7, 14, 21, 28 drei Eckpunkte rot gefärbt wären, was ebenfalls immer ein gleichschenkliges Dreieck enthielte.

Aber auch von den drei Längen k , $2k$ und $4k$ können höchstens zwei vorkommen, wie man durch einfaches Ausprobieren überprüft. Dies schließt für $k = 1$ und $k = 3$ zwei weitere Längen aus. (Für $k = 5$ erhält man – wie schon anderweitig hergeleitet –, dass höchstens zwei der Längen 5, 10 und 15 vorkommen).

Damit können höchstens $17 - 4 = 13 < 14$ Längen vorkommen, was den gewünschten Widerspruch liefert.

3. Beweis (Verfeinerung des Argumentes vom 2. Beweis mit Verschärfung der Aussage): Wir nehmen an, dass es unter den roten Ecken keine drei gibt, die ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Nun nummerieren wir die Ecken im Uhrzeigersinn fortlaufend mit $0, 1, \dots, 34, 35, 36, 37, \dots$; und ordnen jeder Ecke die entsprechende Restklassen mod 35 zu. Wir verkürzen in der Formulierung "Ecke mit der Nummer bzw. Restklasse k " zu "Ecke k ". Mit "Durchmesser" ist immer "Durchmesser des Umkreises des 35-Ecks" gemeint. So lässt sich leicht formulieren:

Ein Dreieck ABC ist genau dann gleichschenklig mit Basis BC , wenn $2A \equiv B + C \pmod{35}$.

Von den 35 Ecken des 15-Ecks seien 15 Ecken rot gefärbt, o.B.d.A. sei darunter die Ecke 0.

Nun betrachten wir die Menge der Ecken $E_k := (-2)^k$ für alle nicht negativen ganzen k ; zusätzlich betrachten wir auch die Menge der Ecken $F_k := -(-2)^k$, es gilt also $F_k = -E_k$, d.h. die Ecken F_k und E_k liegen spiegelbildlich bezüglich des Durchmessers durch die Ecke 0, bilden also mit der Ecke 0 ein gleichschenkliges Dreieck. Die Mengen der E_k und F_k bestehen aus den in der Tabelle angegebenen zwölf Ecken; dies bestätigt man durch einfaches Nachrechnen. Übrigens ist $(-2)^k \equiv (-2)^{k+12} \pmod{35}$.

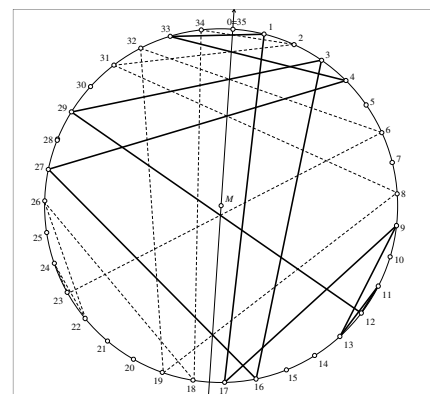
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12..
E_k	1	33	4	27	16	3	29	12	11	13	9	17	1...
F_k	34	2	31	8	19	32	6	23	24	22	26	18	34..

Wie man leicht überprüft (oder zahlentheoretisch begründet), ist stets $E_i \neq F_j$ für alle i, j und die Menge der E_k und F_k besteht aus genau den 24 zu 35 teilerfremden Zahlen bzw. Restklassen mod 35.

Es gilt $(-2)^{k+1} + (-2)^{k+2} = (-2)^{k+1} - 2 \cdot (-2)^{k+1} = -(-2)^{k+1} = 2 \cdot (-2)^k$ für alle positiven ganzen k , d.h. die Ecken $E_k E_{k+1} E_{k+2}$ bilden ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $E_{k+1} E_{k+2}$. Nach Annahme können also davon höchstens zwei rot gefärbt sein. Wir finden aber noch mehr gleichschenklige Dreiecke und können so zeigen, dass noch mehr Ecken nicht rot sein können: Aus Symmetriegründen gilt das Gleiche für die drei Ecken $F_k F_{k+1} F_{k+2}$; und weil weiter gilt, dass

$$\begin{aligned}
 2F_k &= 2 \cdot (-(-2)^k) = (-2) \cdot (-2)^k = (-2)^{k+1} = 0 + E_{k+1}, \\
 2E_k &= 2 \cdot (-2)^k = -2 \cdot (-2)^k = 0 + F_{k+1}, \text{ und} \\
 2E_{k+1} &= 2 \cdot (-2)^{k+1} = -2 \cdot (-2)^{k+1} = 0 + F_{k+2},
 \end{aligned}$$

d.h. auch die Dreiecke $F_k 0 E_{k+1}$, $E_k 0 F_{k+1}$ und $E_{k+1} 0 F_{k+2}$ sind gleichschenklig. Ist also E_{k+1} rot gefärbt, so können die Ecken F_k , F_{k+1} , F_{k+2} nicht gefärbt sein und von den Ecken E_k und E_{k+2} höchstens eine, insgesamt also höchstens zwei. Dies gilt insbesondere für die vier Werte $k = 2, 5, 8, 11$, und so können wir abzählen: von den 24 Eckpunkten E und F sind höchstens $4 \cdot 2 = 8$ rot gefärbt.





Für die restlichen Ecken können wir auf zwei Arten argumentieren:

Variante 1: Nun betrachten wir noch die Menge der Ecken $G_k := 5 \cdot (-2)^k$ und $H_k := -5 \cdot (-2)^k$ sowie $M_k := 7 \cdot (-2)^k$ und $N_k := -7 \cdot (-2)^k$ für alle positiven ganzen k . Analog zu obiger Schlussweise erstellen wir zur Rechnungskontrolle Tabellen:

k	0	1	2	k	0	1	2...
G_k	5	2	2	M_k	7	2	7...
H_k	3	1	1	N_k	2	1	28..
	0	0	5		8	4	.

So können wir in analoger Weise schließen, dass von den Ecken G und H höchstens zwei und von den Ecken M und N höchstens eine rot gefärbt sein kann.

Variante 2: Nun betrachten wir das regelmäßige Siebeneck mit den Ecken 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30 und das regelmäßige Fünfeck mit den Ecken 0, 7, 14, 21, 28. Im regelmäßigen Siebeneck können außer der Ecke 0 höchstens 2 weitere Punkte gefärbt sein, ohne dass ein rotes gleichschenkliges Dreieck entsteht; und im regelmäßigen Fünfeck kann außer der Ecke 0 noch höchstens eine weitere Ecken gefärbt werden.

Insgesamt haben wir außer der schon rot gefärbten Ecke 0 alle anderen Ecken betrachtet. Addition der Maximalwerte und Berücksichtigung der Tatsache, dass Ecke 0 rot gefärbt ist, ergibt die Schlussfolgerung, dass es sicher nicht mehr als $8 + 2 + 1 + 1 = 12$ rot gefärbte Ecken geben kann, wenn keine drei davon ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Damit haben wir schärfer als in der Aufgabenstellung gefordert bewiesen:

Werden von den 35 Ecken 13 rot gefärbt, so sind darunter stets drei, die ein gleichschenkliges Dreieck bilden.

Bemerkung: In einer sehr unübersichtlichen Fallunterscheidung kann nachgewiesen werden, dass diese Grenze auf 10 gesenkt werden kann.

**Aufgabe 3:**

Gegeben ist ein Dreieck mit den Seitenlängen a , b und c , dem Inkreismittelpunkt I und dem Schwerpunkt S .

Beweise: Wenn $a + b = 3c$ gilt, dann ist $S \neq I$ und die Gerade SI steht senkrecht auf einer der Seiten des Dreiecks.

1. Beweis: Mit M , W , H seien die Schnittpunkte der Geraden AB mit der Seitenhalbierenden, der Winkelhalbierenden bzw. der Höhe von C bezeichnet, mit T_S und T_I die Lotfußpunkte der Lote von S bzw. I auf die Gerade AB . Für den zweiten Teil der Aussage genügt es dann zu zeigen, dass $T_I = T_S$.

Das Dreieck ABC kann niemals gleichseitig sein: Falls $a \neq b$ ist es nicht gleichseitig, und wenn $a = b$, dann ist $a = 1,5 \cdot c \neq c$; d.h. es gibt immer zwei verschieden lange Seiten und damit immer eine Winkelhalbierende, die mit der entsprechenden Seitenhalbierenden nicht zusammenfällt. Da $S \neq C$ auf der ersten Geraden liegt, $I \neq C$ auf der zweiten, ist immer $S \neq I$.

Wenn $a = b$, dann ist das Dreieck gleichschenkelig mit Basis AB , d.h. die Winkelhalbierende von C und Seitenhalbierende von C fallen zusammen und sind beide Symmetrieachse; diese enthält die Punkte S und I und steht senkrecht auf der Seite AB .

Wenn $a \neq b$, nehmen wir o.B.d.A. an, dass $a < b$, andernfalls vertauschen wir im Beweis die Bezeichnungen A und B bzw. a und b . Dann liegen die Punkte A , M , W , T_I und H in dieser Reihenfolge auf der Geraden AB , und T_S liegt ebenfalls zwischen M und H . Im Fall $\beta > 90^\circ$ liegt B zwischen T_I und H , im Fall $\beta < 90^\circ$ liegt H zwischen T_I und B , im Fall $\beta = 90^\circ$ liegt H auf B . Mit dieser Kenntnis wissen wir, wann wir Streckenlängen als Summe und wann als Differenz von Teilstrecken berechnen müssen, und weiter, dass es für den Gesamtbeweis genügt zu zeigen, dass $\overline{MT_S} = \overline{MT_I}$.

$$\text{Bekanntlich ist } \overline{AT_I} = \frac{b+c-a}{2}, \text{ also gilt } \overline{MT_I} = \overline{AT_I} - \overline{AM} = \frac{b+c-a}{2} - \frac{c}{2} = \frac{b-a}{2}. \quad (1)$$

Mit x bezeichnen wir die Länge der Strecke BH . Mit Pythagoras in den Dreiecken BHC und AHC folgt, dass die beiden Gleichungen $h^2 = a^2 - x^2$ und $h^2 = b^2 - (c \pm x)^2$ gelten; dabei gilt das "+"-Zeichen im Fall $\beta > 90^\circ$, andernfalls das "-"-Zeichen. Gleichsetzen ergibt $a^2 - x^2 = b^2 - (c \pm x)^2$ oder $c^2 \pm 2cx = b^2 - a^2$, also $x = \pm \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2c}$. Hieraus ergibt sich zusammen mit (1)

$$\overline{MH} = \frac{c}{2} \pm \left(\pm \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2c} \right) = \frac{b^2 - a^2}{2c} = \frac{(b+a)(b-a)}{2c} = 3 \cdot \frac{(b-a)}{2} = 3 \cdot \overline{MT_I}. \quad (2)$$

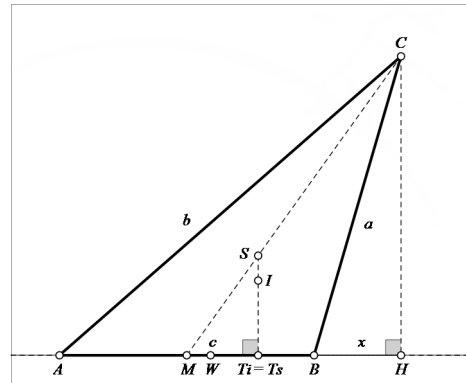
Bekanntlich teilt der Schwerpunkt die Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1, mit Strahlensatz folgt

$$\overline{MH} = 3 \cdot \overline{MT_S} \quad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt sofort $\overline{MT_I} = \overline{MT_S}$, dies war zu zeigen.

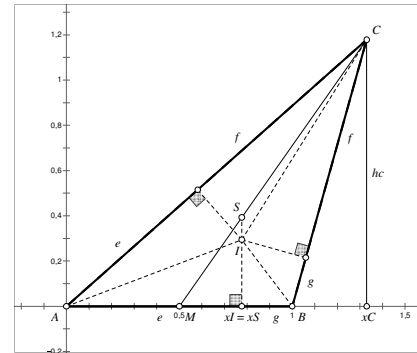
Bemerkung: Im allgemeinen Fall $a \neq b$ gilt auch die Umkehrung: $SI \perp AB \Leftrightarrow a + b = 3c \vee a = b \neq c$,

$$\text{weil } \overline{MH} = \frac{b+a}{c} \cdot \frac{b-a}{2} = 3 \cdot \overline{MT_I} \Leftrightarrow \frac{b+a}{c} = 1 \text{ oder } \frac{b-a}{2} = 0.$$





2. Beweis (Koordinatenrechnung): Wir verwenden die üblichen Bezeichnungen für die Seitenlängen und legen ein Koordinatensystem so über das Dreieck, dass der Ursprung mit A zusammenfällt und die positive x -Achse mit $[AB]$. Die Längeneinheit wählen wir so, dass $A(0|0), B(1|0)$; die Koordinaten weiterer Punkte P bezeichnen wir mit $(x_P|y_P)$. Es genügt nun zu zeigen, dass $y_S \neq y_I$ (dann ist $S \neq I$) und $x_S = x_I$ (dann steht SI senkrecht auf AB).



Bekanntlich teilt der Schwerpunkt die Seitenhalbierende $M_{AB}C$ im Verhältnis $1 : 2$, also folgt mit Strahlensatz

$$y_C = 3y_S \quad \text{und} \quad x_C = \frac{1}{2} + 3(x_S - \frac{1}{2}) = 3x_S - 1, \text{ also} \\ x_S = \frac{1}{3}(x_C + 1).$$

Der Inkreismittelpunkt hat von allen Seiten des Dreiecks den gleichen Abstand $\rho = y_I$. Fällt man das Lot vom Inkreismittelpunkt auf die Seite AB , so hat der Lotfußpunkt die x -Koordinate x_I ; gleichzeitig berührt der Inkreis die Strecke AB in diesem Punkt. Da die Abschnitte auf den Dreieckseiten von der gleichen Ecke bis zum Berührungspunkt des Inkreises gleich lang sind, gilt mit den Bezeichnungen der Figur

$$e + f + g = \frac{a+b+c}{2}, \text{ und da } f + g = a, \text{ ist insbesondere} \quad x_I = e = \frac{-a+b+c}{2}.$$

Der Inkreismittelpunkt eines Dreiecks liegt immer im Innern des Dreiecks, also zerlegen die Strecken AI, BI und CI das Dreieck ABC in drei Teildreiecke, deren Höhen über der Seite AB, BC bzw. CA jeweils mit dem Inkreisradius ρ übereinstimmen. Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt demnach zusammen mit $a + b = 3c$ und $c = 1$

$$|ABC| = \frac{a+b+c}{2} \cdot \rho = \frac{4c}{2} \cdot y_I = 2 \cdot y_I.$$

Andererseits gilt auch $|ABC| = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot y_S$, woraus $2 \cdot y_I = \frac{3}{2} \cdot y_S$ folgt und weiter $y_I \neq y_S$.

Nun zeigen wir noch $x_S = x_I$: Mit Pythagoras und $c = \overline{AB} = 1$ erhält man $b = \overline{AC} = \sqrt{x_C^2 + y_C^2}$, $a = \overline{BC} = \sqrt{(1-x_C)^2 + y_C^2}$. Dann gilt

$$a + b = 3c \Leftrightarrow a = 3 - b \Leftrightarrow \sqrt{(1-x_C)^2 + y_C^2} = 3 - \sqrt{x_C^2 + y_C^2} \quad (*)$$

$$\Rightarrow 1 - 2x_C + x_C^2 + y_C^2 = 9 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{x_C^2 + y_C^2} + x_C^2 + y_C^2$$

$$\Leftrightarrow x_C = 3 \cdot \sqrt{x_C^2 + y_C^2} - 4.$$

Also ist

$$x_I = \frac{-a+b+c}{2} = \frac{-\sqrt{(1-x_C)^2 + y_C^2} + \sqrt{x_C^2 + y_C^2} + 1}{2} \\ = \frac{-(3 - \sqrt{x_C^2 + y_C^2}) + \sqrt{x_C^2 + y_C^2} + 1}{2} = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} - 1 = \frac{1 + 3\sqrt{x_C^2 + y_C^2} - 4}{3} \\ = \frac{1 + x_C}{3} = x_S, \text{ das war zu zeigen.}$$

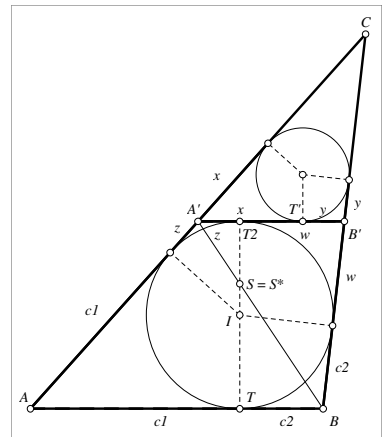
Bemerkung: Es gilt $|ABC| = \frac{a+b+c}{2} \cdot x_I = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot c \cdot 3 \cdot y_S$

und damit in nicht gleichseitigen Dreiecken: $SI \parallel AB \Leftrightarrow y_S = y_I \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2} \cdot c \Leftrightarrow a + b = 2c$.

Also gilt $a + b = 3c \Leftrightarrow SI \perp AB$ und $a + b = 2c \Leftrightarrow SI \parallel AB$.



3. Beweis (elementargeometrisch): Der Berührungspunkt des Inkreises auf der Seite AB sei T . Wir wählen auf AC und BC zwei Punkte A' und B' so, dass $A'B' \parallel AB$ und $A'B'$ Tangente an den Inkreis von Dreieck ABC ist, den Berührungspunkt nennen wir T_2 . Die Strecke TT_2 ist dann Durchmesser des Inkreises, insbesondere gilt $TT_2 \perp AB$. Das Dreieck $A'B'C$ ist das Bild von Dreieck ABC bei der zentrischen Streckung mit Zentrum C und dem Streckfaktor $t := \overline{A'C} : \overline{AC}$; das Bild eines Objektes X bei dieser Abbildung werde mit X' bezeichnet. Der Berührungspunkt des Inkreises von Dreieck $A'B'C$ auf der Seite $A'B'$ ist dann T' . Den Inkreis von Dreieck ABC können wir auch deuten als Ankreis des Dreiecks $A'B'C'$ an die Seite $A'C'$.



Die Abschnitte auf den beiden Tangenten von einem Punkt an einen Kreis liegen symmetrisch und sind deswegen gleich lang. Wir bezeichnen die Längen dieser Abschnitte auf den Tangenten von A' an die beiden Inkreise gemäß Skizze mit x und z , die Abschnitte auf den Tangenten von B' mit y und w , die Längen der Abschnitte auf den Tangenten von A und B mit c_1 bzw. c_2 , es ist dann $c_1 + c_2 = c$.

Weil die gemeinsamen Tangenten von C symmetrisch liegen, gilt $x + z = y + w$, und da $\overline{A'B'}$ auf zwei Arten berechnet werden kann, gilt $x + y = z + w$. Addition der Seiten beider Gleichungen ergibt $2x + y + z = 2w + y + z$, also $x = w$; und Subtraktion ergibt $z - y = y - z$, also $y = z$. Es ist also $\overline{A'T_2} = \overline{B'T'}$.

Bemerkung: Als Begründung wäre auch das Zitat folgenden Hilfssatzes ausreichend: HS: Die Berührungspunkte von An- und Inkreis liegen symmetrisch zum Mittelpunkt der Seite.)

Allgemeiner als in der Aufgabenstellung setzen wir zunächst $a + b = kc$ ($k \geq 0$) und bestimmen den Streckfaktor t in Abhängigkeit von k : Es ist

$$\overline{A'A} = \overline{AC} - \overline{A'C} = b - t \cdot b = (1 - t) \cdot b, \text{ aber auch}$$

$$\overline{A'A} = c_1 + z = c_1 + y = c_1 + t \cdot c_2.$$

Entsprechendes gilt für $\overline{B'B}$; durch Addition erhalten wir die Gleichung

$$(1 - t) \cdot b + (1 - t) \cdot a = c_1 + t \cdot c_2 + c_2 + t \cdot c_1$$

$$\Leftrightarrow (1 - t) \cdot (a + b) = (c_1 + c_2) \cdot (1 + t), \text{ mit } c_1 + c_2 = c \text{ und } a + b = k \cdot c \text{ bleibt}$$

$$(1 - t) \cdot k = (1 + t) \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{k - 1}{k + 1}.$$

Nun betrachten wir den Schnittpunkt der Strecken BA' und TT_2 , wir nennen ihn S^* . Für $k = 3$ ist $t = 1/2$, also A' der Mittelpunkt der Seite AC und somit die Strecke BA' Seitenhalbierende im Dreieck ABC . Nach Strahlensatz (Zentrum S , $AB \parallel A'B'$) gilt $\overline{BS} : \overline{SA'} = \overline{AB} : \overline{B'A'} = t = 2 : 1$, also ist $S^* = S$ der Schwerpunkt des Dreiecks ABC . Da weiter $\overline{TS} : \overline{ST_2} = 2 : 1 \neq 1 : 1 = \overline{TI} : \overline{IT_2}$ ist $S \neq I$; und da S und I beide auf der Trägergeraden des Durchmessers TT_2 liegen, folgt $SI \perp AB$.

**Aufgabe 4:**

Eine natürliche Zahl nennen wir *heinersch*¹, wenn sie sich als Summe einer positiven Quadratzahl und einer positiven Kubikzahl darstellen lässt.

Beweis: Es gibt unendlich viele heinersche Zahlen, deren Vorgänger und deren Nachfolger ebenfalls heinersch sind.

Bezeichnungen: Drei aufeinander folgende heinersche Zahlen nennen wir ein *heinersches Tripel*. Die Aufgabenstellung ist erfüllt, wenn man unendlich viele heinersche Tripel gefunden hat.

1. Beweis ("Meteoriten"-Beweis: Eine Formel fällt vom Himmel und wird verifiziert):

Für jede ganze positive Zahl $t > 1$ sind die drei Zahlen

$$\begin{aligned} H_1(t) &:= (2t^6 - 2t^3)^2 + (2t^3)^3 = 4t^{12} - 8t^9 + 4t^6 + 8t^9 + 1 - 1 = (2t^6 + 1)^2 - 1, \\ H_2(t) &:= (2t^6 - 1)^2 + (2t^2)^3 = (2t^6 + 1)^2 \quad \text{und} \\ H_3(t) &:= (2t^6 + 1)^2 + 1^3 = (2t^6 + 1)^2 + 1 \end{aligned}$$

alle positiv, ganz, verschieden (weil streng monoton wachsend mit t), heinersch (weil beide Summanden nach den Gleichheitszeichen positiv ganz sind), und H_1 und H_3 sind Vorgänger bzw. Nachfolger von H_2 .

Bemerkungen: Für $t = 2$ erhält man

$$H_1(2) = 16640 = 112^2 + 16^3; \quad H_2(2) = 16641 = 127^2 + 8^3; \quad H_3(2) = 16642 = 129^2 + 1^3.$$

Für $t = 1$ und $t = 0$ erhält man die "unechten" heinerschen Tripel

$$H_1(1) = 8 = 0^2 + 2^3, \quad H_2(1) = 9 = 1^2 + 2^3, \quad H_3(1) = 10 = 3^2 + 1^3 \quad \text{bzw.}$$

$$H_1(0) = 0 = 0^2 + 0^3, \quad H_2(0) = 1 = (-1)^2 + 0^3, \quad H_3(0) = 2 = 1^2 + 1^3.$$

2. Beweis (Angabe und Verifizierung einer Formel mit zwei Parametern): Für vorgegebene positive ganze Zahlen r und s sind die drei Zahlen

$$\begin{aligned} H_1(r) &:= (4r^2 - 1)^3 + (10r^2)^2 = 64r^6 + 4r^2(13r^2 + 3) - 1, \\ H_2(r;s) &:= (4r^2)^3 + (2rs)^2 = 64r^6 + 4r^2s^2 \quad \text{und} \\ H_3(r) &:= (4r^2 + 1)^3 + (2r^2)^2 = 64r^6 + 4r^2(13r^2 + 3) + 1 \end{aligned}$$

alle heinersch (die Summanden nach dem ersten Gleichheitszeichen sind positiv ganz!); weiter sind H_1 und H_3 dann Vorgänger bzw. Nachfolger von H_2 , wenn die zusätzliche Bedingung $s^2 = 13r^2 + 3$ oder äquivalent

$$s^2 - 13r^2 = 3 \quad (*)$$

erfüllt ist. Zu verschiedenen r sind die H_1 – weil streng monoton wachsend mit r – sicher verschieden, ebenso die H_2 untereinander. Es genügt also nachzuweisen, dass es unendlich viele ganzzahlig positive Lösungen $(r;s)$ von $(*)$ gibt. Solche r und s lassen sich leicht mit der Theorie der Pell'schen Gleichung konstruieren (Lösungsideen und Rechnungskontrolle findet man im Internet z.B. über die App "wolframAlpha", vgl. screenshot):

Durch Probieren findet man eine erste Lösung $(r_0;s_0) = (1;4)$; es ist also $4^2 - 13 \cdot 1^2 = 3$. Weiter betrachtet man die Gleichung

$$u^2 - 13v^2 = 1 \quad (**), \quad \text{sie hat die Lösungen}$$

$(u_0;v_0) = (1;0)$ und $(u_1;v_1) = (649;180)$, d.h. es ist $649^2 - 180^2 \cdot 13 = 1$.

The screenshot shows the WolframAlpha interface with the input $x^2 - 13y^2 = 3$. The output displays the integer solutions as:

$$x = \pm \frac{1}{2} \left(-4(649 - 180\sqrt{13})^n - \sqrt{13} (649 - 180\sqrt{13})^n - 4(649 + 180\sqrt{13})^n - \sqrt{13} (649 + 180\sqrt{13})^n \right),$$

$$y = \pm \frac{1}{26} \left(-13(649 - 180\sqrt{13})^n + 4\sqrt{13} (649 - 180\sqrt{13})^n - 13(649 + 180\sqrt{13})^n - 4\sqrt{13} (649 + 180\sqrt{13})^n \right), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0$$

¹ Mit der Bezeichnung "heinersch" ehren wir Hanns-Heinrich ("Heiner") Langmann, der 34 Jahre lang die Geschäftsstelle des Bundeswettbewerb Mathematik geleitet hat und zum Jahreswechsel in den wohlverdienten Ruhestand tritt.



Nun multiplizieren wir für $n \geq 0$ das Binom $(649 + 180\sqrt{13})^n$ aus und fassen zusammen, dies ergibt einen Ausdruck der Form $u_n + v_n\sqrt{13}$ mit geeigneten positiven ganzen Zahlen u_n, v_n . Die Folgen der u_n und v_n sind sicher streng monoton wachsend; gleichzeitig wissen wir, dass $(649 - 180\sqrt{13})^n = u_n - v_n\sqrt{13}$. Einfache Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} u_n^2 - v_n^2 \cdot 13 &= (u_n + v_n\sqrt{13}) \cdot (u_n - v_n\sqrt{13}) = (649 + 180\sqrt{13})^n \cdot (649 - 180\sqrt{13})^n \\ &= [(649 + 180\sqrt{13}) \cdot (649 - 180\sqrt{13})]^n = [649^2 - 180^2 \cdot 13]^n = 1^n = 1, \end{aligned}$$

d.h. jedes Zahlenpaar $(u_n; v_n)$ eine Lösung von (**). Weiter ist $649 + 180\sqrt{13} > 1$, d.h. mit wachsendem n wird $(649 + 180\sqrt{13})^n$ beliebig groß; es gibt also unendlich viele $(u_n; v_n)$, die Lösung von (**) sind.

Zu jedem solchen Paar $(u_n; v_n)$ definieren wir nun $r_n := u_n + 4v_n$, $s_n := 4u_n + 13v_n$; es ist dann (es gelten überall die oberen oder überall die unteren Rechenzeichen)

$$s_n \pm r_n\sqrt{13} = (4u_n + 13v_n) \pm (u_n + 4v_n)\sqrt{13} = (4 \pm \sqrt{13}) \cdot (u_n \pm v_n\sqrt{13})$$

Hiermit erhalten wir

$$\begin{aligned} s_n^2 - 13r_n^2 &= (s_n + r_n\sqrt{13}) \cdot (s_n - r_n\sqrt{13}) = (4 + \sqrt{13}) \cdot (u_n + v_n\sqrt{13}) \cdot (4 - \sqrt{13}) \cdot (u_n - v_n\sqrt{13}) \\ &= (4 + \sqrt{13}) \cdot (4 - \sqrt{13}) \cdot (u_n + v_n\sqrt{13}) \cdot (u_n - v_n\sqrt{13}) = 3 \cdot 1 = 3, \end{aligned}$$

d.h. $(r_n; s_n)$ ist eine Lösung von (*); und weil die Folgen der u_n und v_n streng monoton wachsend sind, sind es auch die Folgen der r_n und s_n . Es gibt also unendlich viele Lösungen $(r_n; s_n)$ zu (*), das war zu zeigen.

Bemerkungen: Das Paar $(r_0; s_0) = (1; 4)$ führt zum Tripel $127 = 3^3 + 10^2$, $H_2(1; 4) = 128 = 4^3 + 8^2$, $129 = 5^3 + 2^2$. Mit *DERIVE* erhält man $(r_1; s_1) = (1369; 4936)$ und $(r_2; s_2) = (1776961; 6406924)$; dies liefert als nächstes die heinerschen Zahlen

$$H_2(1369; 4936) = 421309111022716351808$$

$$H_2(1776961; 6406924) = 2014871487313770747701034231710777909888.$$

Die Folge der u_n und v_n lässt sich rekursiv beschreiben:

$$u_0 = 1, v_0 = 0, \quad u_{n+1} = 649u_n + 13 \cdot 180 \cdot v_n, \quad v_{n+1} = 649 \cdot v_n + 180 \cdot u_n;$$

$$\begin{aligned} \text{dies folgt aus der Identität } (649 + 180\sqrt{13})^{n+1} &= (u_n + v_n\sqrt{13}) \cdot (649 + 180\sqrt{13})^n \\ &= (649u_n + 13 \cdot 180v_n) + (649v_n + 180u_n)\sqrt{13}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich nach kurzer Rechnung die eine rekursive Beschreibung die Folge der r_n und s_n :

$$r_0 = 1, s_0 = 4, \quad r_{n+1} = 649r_n + 180s_n, \quad s_{n+1} = 13 \cdot 180r_n + 649s_n.$$

3. Beweis (= Ergänzung des 2. Beweises um eine Motivation): Ein bisschen Herumprobieren liefert das heinersche Tripel $H_1 = 127 = 3^3 + 10^2$, $H_2 = 128 = 4^3 + 8^2$, $H_3 = 129 = 5^3 + 2^2$; es erweckt die Hoffnung, dass es unendlich viele heinersche Tripel der Form $H_1 = (a-1)^3 + x^2$, $H_2 = a^3 + y^2$, $H_3 = (a+1)^3 + z^2$ mit ganzzahligen $a > 1$, $x, y, z \geq 1$ und $H_1 + 1 = H_2 = H_3 - 1$ gibt. Tatsächlich kann man unendlich viele solche Tripel konstruieren: Es gilt:

$$\begin{aligned} H_1 + 1 = H_3 - 1 &\Leftrightarrow (a-1)^3 + x^2 + 1 = (a+1)^3 + z^2 - \\ &\Leftrightarrow -3a^2 + 3a + x^2 = 3a^2 + 3a + z^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - z^2 = 6a^2. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist gerade, also muss auch die linke Seite gerade sein. Diese ist dann aber sogar durch 4 teilbar, woraus wiederum folgt, dass a gerade sein muss. Wir wählen $a = 4k$ (weil wir eine Lösung mit $a = 4$ schon kennen, weil die Wahl $a = 2k$ in eine Sackgasse führt und weil außerdem bei der Wahl



einer Quadratzahl für k die Zahl $4k$ ebenfalls Quadratzahl ist, wenn k alle positiven ganzen Zahlen durchläuft). Mögliche Lösungen sind dazu $x = 10k$ und $z = 2k$.

Als Zwischenergebnis halten wir fest: Für jedes Tripel $(a; x; z) = (4k; 10k; 2k)$ sind die Zahlen $H_1(k) = (4k - 1)^3 + (10k)^2$ und $H_3(k) = (4k + 1)^3 + (2k)^2$ heinersche Zahlen mit $H_1(k) + 2 = H_3(k)$.

Nun konstruieren wir unendlich viele k so, dass die dazwischen liegende Zahl H_2 ebenfalls heinersch ist, d.h. dass es eine positive ganze Zahl y gibt, für die $H_2 = a^3 + y^2$. Es gilt

$$\begin{aligned} H_1 + 1 = H_2 &\Leftrightarrow (a - 1)^3 + x^2 + 1 = a^3 + y^2 \\ &\Leftrightarrow -3a^2 + 3a + x^2 = y^2 \\ &\Leftrightarrow -3 \cdot (4k)^2 + 3 \cdot 4k + (10k)^2 = y^2 \\ &\Leftrightarrow 4k(13k + 3) = y^2 \end{aligned}$$

Sinnvoll ist es $k = r^2$ mit positivem ganzzahligem r zu wählen: Da $4k$ dann selbst eine Quadratzahl ist, genügt es, zu jedem r ein positives ganzzahliges s so zu finden, dass $(13r^2 + 3) = s^2$. Diesen Nachweis führen wir wie im 2. Beweis.

Bemerkung: An mehreren Stellen haben wir die Lösungsvielfalt eingeschränkt bzw. anscheinend willkürlich bei mehreren Fortsetzungsmöglichkeiten die richtige gewählt: Zunächst dadurch, dass wir die Auswahl der Kubikzahlen auf drei aufeinander folgende Kubikzahlen eingeschränkt haben, dann die Beschränkung der a auf Vielfache von 4 (bei Verwendung von Vielfachen von 2 stößt man evtl. auf die Pell'sche Gleichung $37r^2 + 6 = y^2$; diese hat keine Lösung, weil die linke Seite Viererrest 2 oder 3 hat, die rechte dagegen 0 oder 1) und schließlich die Beschränkung auf das Lösungstripel (a, x, z) auf $(4k, 10k, 2k)$; hier wäre u.a. auch $(4k, 14k, 10k)$ möglich gewesen.

4. Beweis (Skizze): Für $n \geq 1$ sei $a_n := 48n^5 + 120n^4 + 100n^3 + 30n^2 + 3n + 1$ und

$$b_n := (2n + 1)^2,$$

dann sind die Zahlen $h(n) - 1 := (a_n - 1)^2 + (b_n + 2n)^3$,

$$h(n) := a_n^2 + b_n^3 \quad \text{und}$$

$$h(n) + 1 := (a_n + 1)^2 + (b_n - 2n - 2)^3$$

drei aufeinander folgende heinersche Zahlen, und weil die Ausdrücke streng monoton mit n sind, erhalten wir auch für verschiedene n verschiedene Tripel. Dass die Wurzeln der Quadratzahlen und Kubikzahlen alle positive und ganze Zahlen sind, ist offensichtlich, und dass es aufeinander folgende Zahlen sind, weist man z.B. durch konkretes Ausmultiplizieren (für eine vollständige Lösung ist dies notwendig!). Tatsächlich erhält man für die drei Zahlen

$$2304n^{10} + 11520n^9 + 24000n^8 + 26880n^7 + 17552n^6 + 7008n^5 + 1980n^4 + 540n^3 + 129n^2 + 18n + i.$$

wobei i die Werte 1, 2 und 3 annimmt.

Bemerkung: Die gefundenen Zahlentripel haben die Eigenschaft, dass die Wurzeln der Quadratzahlen drei aufeinander folgenden ganze Zahlen sind. Die Formel liefert auch für $n < 1$ Summen von Kubik- und Quadratzahlen, dann sind aber nicht mehr alle dazugehörige Wurzeln positiv. So liefert z.B. $n = 0$ das unechte heinersche Tripel $1 = 0^2 + 1^3$, $2 = 1^2 + 1^3$, $3 = 2^2 + (-1)^3$.

Wie kommt man drauf? Wir setzen an $h := a^2 + b^3$ (alle Variablen stehen für positive ganze Zahlen) und hoffen, dass es zu unendlich vielen geschickt gewählten Paaren $(a; b)$ ein c und d gibt, sodass

$$h - 1 = (a - 1)^2 + c^3, \quad (1)$$

$$h = a^2 + b^3, \quad (2)$$

$$h + 1 = (a + 1)^2 + d^3. \quad (3)$$

(2) in (1) ergibt die notwendige Bedingung $c^3 - b^3 = 2a - 2 > 0$ (4), was die Substitution $c = b + 2n$ mit geeignetem $n \in \mathbb{N}$ nahelegt (vgl. Definition von $h(n) - 1$!). Einsetzen in (4) ergibt $b^3 + 6b^2n + 12bn^2 + 8n^3 - b^3 = 2a - 2$ und hieraus die notwendige Bedingung

$$a = a_n = 3b^2n + 6bn^2 + 4n^3 + 1 \quad (5).$$



Ähnlich erhalten wir nach Einsetzen von (2) in (3) die Gleichung $a^2 + b^3 + 1 = (a + 1)^2 + d^3$, was sich vereinfacht zu $b^3 - 2a = d^3$; mit (5) erhält man dann die notwendige Bedingung

$$d^3 = d_{b,n}^3 = b^3 - 6b^2n - 12bn^2 - 8n^3 - 2 \quad (6).$$

Nun gilt es, unendlich viele Paare $(b; n)$ zu finden, für die der Term (6) die dritte Potenz einer positiven ganzen Zahl ist. Ausprobieren mit dem Computer liefert $d_{9;1} = 5$, $d_{25;2} = 19$, $d_{49;3} = 41$; dies führt zur Vermutung, dass dies für die Paare $(b; n) = ((2n + 1)^2; n)$ stets erfüllt ist. Einsetzen von $b_n = (2n + 1)^2$ in (6), Ausmultiplizieren und Faktorisieren ergibt tatsächlich, dass

$$\begin{aligned} d^3 &= d^3((2n+1)^2; n) = (2n+1)^6 - 6(2n+1)^4n - 12(2n+1)^2n^2 - 8n^3 - 2 \\ &= 64n^6 + 96n^5 - 40n^3 + 6n - 1 = (4n^2 + 2n - 1)^3 = (4n^2 + 4n + 1 - 2n - 2)^3 \\ &= (b_n - 2n - 2)^3 \end{aligned}$$

für jedes ganzzahlige $n \geq 1$ dritte Potenz einer positiven ganzen Zahl ist. Mit (5) ist schließlich

$$\begin{aligned} a_n &= 3(2n+1)^4n + 6(2n+1)^2n^2 + 4n^3 + 1 \\ &= 48n^5 + 120n^4 + 100n^3 + 30n^2 + 3n + 1. \end{aligned}$$

5. Beweis (mit Ausblick auf mehrere Folgen von heinerschen Tripeln):

Für $n(a) := a^2 + 2a$ sind

$$\begin{aligned} h_2(a) &:= n(a)^2 = (a^2 + 2a)^2 = a^4 + 4a^3 + 4a^2 = a^4 - 4a^3 + 4a^2 + 8a^3 = (a^2 - a)^2 + (2a)^3 \text{ und} \\ h_3(a) &:= h_2(a) + 1 = n(a)^2 + 1^3. \end{aligned}$$

für $a > 1$ offensichtlich aufeinander folgende heinersche Zahlen, von denen die kleinere eine Quadratzahl ist.

Für $m(b) := 2b^2 + 4b + 3$ ist

$$\begin{aligned} h_1(b) &:= m(b)^2 - 1 = (2b^2 + 4b + 3)^2 - 1 = 4b^4 + 16b^3 + 28b^2 + 24b + 9 - 1 \\ &= 4b^4 + 8b^3 + 4b^2 + 8b^3 + 24b^2 + 24b + 8 \\ &= (2b^2 + 2b)^2 + (2b + 2)^3 \end{aligned}$$

für $b \geq 1$ offensichtlich eine heinersche Zahl, die um 1 kleiner als eine Quadratzahl ist.

Für $a_1 = 9$ und $b_1 = 6$ erhält man (Nachrechnen im Kopf) $n(a_1) = m(b_1)$ (Induktionsanfang), d.h. $h_1(b_1)$, $h_2(a_1)$ und $h_3(a_1)$ sind drei aufeinander folgende heinersche Zahlen; und wenn $n(a_i) = m(b_i)$ für irgend ein a_i und b_i (Induktionsvoraussetzung), dann auch für $a_{i+1} := 3a_i + 4b_i + 6$ und $b_{i+1} := 2a_i + 3b_i + 4$, was durch Nachrechnen bestätigt wird: Es ist

$$\begin{aligned} n(a_{i+1}) &= a_{i+1}^2 + 2a_{i+1} = (3a_i + 4b_i + 6)^2 + 2(3a_i + 4b_i + 6) \\ &= 9a_i^2 + 16b_i^2 + 36 + 24a_ib_i + 36a_i + 48b_i + 6a_i + 8b_i + 12 \\ &= 9a_i^2 + 16b_i^2 + 48 + 24a_ib_i + 42a_i + 56b_i; \\ m(b_{i+1}) &= (2b_{i+1}^2 + 4b_{i+1} + 3) = 2(2a_i + 3b_i + 4)^2 + 4(2a_i + 3b_i + 4) + 3 \\ &= 8a_i^2 + 18b_i^2 + 32 + 24a_ib_i + 32a_i + 48b_i + 8a_i + 12b_i + 19 \\ &= 8a_i^2 + 18b_i^2 + 51 + 24a_ib_i + 40a_i + 60b_i. \end{aligned}$$

Die Differenz der beiden Werte ist dann nach Induktionsvoraussetzung

$$n(a_{i+1}) - m(b_{i+1}) = a_i^2 + 2a_i - (2b_i^2 + 4b_i + 3) = n(a_i) - m(b_i) = 0,$$

also sind die beiden Werte gleich.

Es bleibt noch anzumerken, dass die Folgen der a_n und b_n offensichtlich streng monoton steigend sind, ebenso die Folgen der $n(a)$, $m(b)$, $h_2(a)$, $h_3(a)$ und $h_1(b)$. Somit erhalten wir unendliche viele heinersche Tripel, die auch paarweise verschieden sind.

(Man erhält die Zahlen $n(9)^2 = m(6)^2 = 9801$, $n(57)^2 = m(40)^2 = 11\,309\,769$, $n(337)^2 = m(238)^2 = 13051463049$.)



Wie kommt man drauf? Wir wählen den Ansatz $h_2 = m^2$ und hoffen, dass es unendlich viele Zahlen m gibt, dass sowohl $h_2 := m^2$ als auch $h_1 = m^2 - 1$ heinersch sind; unser Ansatz stellt sicher, dass dann auch $h_3 := h_2 + 1 = m^2 + 1^3$ ist. (Dieser Ansatz wird letztlich auch in Beweis 1 verwendet.)

Zuerst versuchen wir also möglichst viele Quadratzahlen zu finden, die auch heinersch sind. Ein Blick in eine Tabelle lässt vermuten, dass die Quadrate aller Dreieckszahlen (nicht nur von diesen!) heinersch sind. Dies lässt sich leicht durch folgende Termumformung bestätigen: Es ist

$$\left(\frac{a(a+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{a^4 + 2a^3 + a^2}{4} = \frac{a^4 - 2a^3 + 4a^3 + a^2}{4} = \left(\frac{a(a-1)}{2}\right)^2 + a^3.$$

Dieser Trick lässt sich in allgemeinerer Form anwenden: Für positiv ganzzahlige r, s, a ist

$$h_2(r, s, a) := (ra^2 + sa)^2 = (sa)^4 - 2rsa^3 + (sa)^2 + 4rsa^3 = (ra^2 - sa)^2 + (ta)^3$$

dann eine heinersche Zahl, wenn $t := 4rs$ eine Kubikzahl ist. So sind die Zahlen der Form $(a^2 + 2a)^2$, $(2a^2 + a)^2$, $(a^2 + 16a)^2$ usw. stets heinersch, aber auch $(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a)^2$. Zusätzlich bemerken wir noch, dass h_2 streng monoton mit n wächst, d.h. dass wir für verschiedene n auch verschiedenen Zahlen h_2 erhalten. (Für weitere Ansätze: Auch $(a^2 - 1)^2$, $(2a^6 + 1)^2$ sind alle heinersch.)

Nun suchen wir möglichst viele heinersche Zahlen h_1 , für die $h_1 + 1$ eine Quadratzahl ist. Ermutigt durch obiges Ergebnis (ein Polynom vierten Grades lässt sich aufspalten in Summe aus dritter Potenz und Quadrat eines quadratischen Polynoms) betrachten wir folgenden Ansatz (alle Variablen positiv ganz):

$$h_1 + 1 = (pb^2 + qb + r)^2 + (sb + t)^3 + 1 = (Ab^2 + Bb + C)^2$$

Ausmultiplizieren mit anschließendem Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} p^2b^4 &+ (2pq + s^3)b^3 + (2rp + q^2 + 3s^2t)b^2 + (2rq + 3st^2)b + (r^2 + t^3) + 1 \\ = &A^2b^4 + 2ABb^3 + (B^2 + 2AC)b^2 + 2BCb + C^2, \text{ also} \end{aligned}$$

$$C^2 = (r^2 + t^3) + 1; 2BC = 2rq + 3st^2, B^2 + 2AC = 2rp + q^2 + 3s^2t; 2AB = 2pq + s^3; A^2 = p^2.$$

Eine mögliche Lösung ist u.a. $r = 0, p = q = s = t = 2$, woraus sich $A = 2, B = 4$ und $C = 3$ ergibt, also die oben angeführte Aussage, dass Zahlen der Form $(2b^2 + 4b + 3)^2 - 1$ stets heinersch sind.

Schließlich gilt es nun unendliche viele Paare natürlicher Zahlen (a, b) zu finden, für die $2b^2 + 4b + 3 = a^2 + 2a$ oder äquivalent $(a + 1)^2 - 2(b + 1)^2 = 2$ mit der Anfangslösung $(a; b) = (9; 6)$. Dies ist eine Pell'sche Gleichung, man rückt ihr mit den im 2. Beweis gezeigten Methoden auf die Pelle.

Bemerkungen: Es wird leicht vergessen, dass die Angabe einer Formel und deren Verifizierung erst dann eine vollständige Lösung darstellt, wenn auch begründet wird, warum man damit wirklich unendlich viele verschiedene Zahlen erhält, von denen auch unendlich viele positiv ganzzahlig sind.

Die Heinerschen Tripel bis 5000 (Berechnung mit Excel-Tabelle; ohne Gewähr):

126 = 5 ³ + 1 ²	350 = 5 ³ + 15 ²	441 = 6 ³ + 15 ²	485 = 1 ³ + 22 ²
127 = 3 ³ + 10 ²	351 = 3 ³ + 18 ²	442 = 1 ³ + 21 ²	486 = 5 ³ + 19 ²
128 = 4 ³ + 8 ²	352 = 7 ³ + 3 ²	443 = 7 ³ + 10 ²	487 = 7 ³ + 12 ²
129 = 5 ³ + 2 ²	353 = 4 ³ + 17 ²		
511 = 3 ³ + 22 ²	848 = 4 ³ + 28 ²	1431 = 11 ³ + 10 ²	1568 = 7 ³ + 35 ²
512 = 7 ³ + 13 ²	849 = 2 ³ + 29 ²	1432 = 7 ³ + 33 ²	1569 = 5 ³ + 38 ²
513 = 8 ³ + 1 ²	850 = 9 ³ + 11 ²	1433 = 4 ³ + 37 ²	1570 = 9 ³ + 29 ²
2024 = 7 ³ + 41 ² = 10 ³ + 32 ²	2752 = 12 ³ + 32 ²	3024 = 12 ³ + 36 ²	3844 = 12 ³ + 46 ²
2025 = 9 ³ + 36 ²	2753 = 14 ³ + 3 ²	3025 = 10 ³ + 45 ² = 6 ³ + 53 ²	3845 = 1 ³ + 62 ²
2026 = 1 ³ + 45 ²	2754 = 9 ³ + 45 ²	3026 = 1 ³ + 55 ²	3846 = 5 ³ + 61 ²
4697 = 13 ³ + 50 ²			
4698 = 9 ³ + 63 ²			
4699 = 7 ³ + 66 ²			