BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK

Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2018

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: Mai 2018

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

STIFTERVERBAND

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Aufgabe 1: Welches ist die größte natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass jede ihrer Ziffern außer der ersten und der letzten kleiner ist als das arithmetische Mittel ihrer beiden Nachbarziffern?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Bemerkung: In der Aufgabenstellung und in den Beweisen müsste immer formuliert sein, dass es sich um die Ziffern bei Darstellung im Dezimalsystem handelt. Im Interesse einer besseren Lesbarkeit wurde hierauf verzichtet.

Bezeichnungen: Eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass jede ihrer Ziffern außer der ersten und der letzten kleiner ist als das arithmetische Mittel ihrer beiden Nachbarziffern, nennen wir *konvex*. Die größte konvexe Zahl sei mit N bezeichnet.

Antwort: Die gesuchte Zahl ist 96 433 469.

1. Beweis: Eine Zahl ist genau dann konvex, wenn für beliebige drei aufeinander folgende ihrer Ziffern a, b, c stets $b < \frac{a+c}{2}$ gilt; dies ist wiederum äquivalent zu $a - b > b - c$, d.h. die Differenz zweier aufeinander folgender Ziffern dieser Zahl – dabei ist immer "linke Ziffer minus rechte Ziffer" gemeint – wird von links nach rechts immer kleiner.

Wie man leicht mit Kopfrechnen bestätigt, hat die Zahl 96 433 469 acht Ziffern und ist konvex. Die Zahl N hat also mindestens 9 Ziffern oder sie hat 8 Ziffern und ist nicht kleiner als 96 433 469.

Zu jeder konvexen Zahl mit mehr als zwei Ziffern, deren Dezimaldarstellung nicht mit Ziffer 9 beginnt, findet man leicht eine größere konvexe Zahl, indem man die erste Ziffer durch eine 9 ersetzt. Dann ist die neu entstandene Zahl größer als die ursprüngliche, und das arithmetische Mittel aus erster und dritter Ziffer ist größer geworden, d.h. die neu entstandene Zahl ist ebenfalls konvex. Ebenso kann man die letzte Ziffer – falls diese kleiner als 9 ist – durch eine Ziffer 9 ersetzen und erhält ebenfalls eine größere und konvexe Zahl. Wir wissen also, dass N mit einer Ziffer 9 beginnt und mit einer Ziffer 9 endet; weiter wissen wir, dass die gesuchte Zahl mindestens 8 Ziffern hat.

Es ist klar, dass in der Dezimaldarstellung einer konvexen Zahl mit mehr als zwei Ziffern keine zwei Ziffern 9 aufeinander folgen können, d.h. die zweite Ziffer der gesuchten Zahl und die vorletzte Ziffer sind kleiner als 9. Damit haben die oben genannten Differenzen zwischen aufeinander folgenden Ziffern zunächst einen positiven Wert, werden dann immer kleiner und sind schließlich negativ. Damit werden von links die Ziffern der Zahl zunächst kleiner und irgendwann wieder größer, wobei es möglich ist, dass höchstens einmal zwei gleiche Ziffern nebeneinanderstehen können. Wir können somit die gesuchte Zahl schreiben in der Form $a_1a_2...a_kb_1b_2...b_j$ mit $9 = a_1 > a_2 > ... > a_k \le b_1 < b_2 < ... b_j = 9$, dabei ist $k + j$ die Anzahl der Ziffern der gesuchten Zahl.

Für die Differenzen aufeinander folgender Ziffern gilt

$$(a_1 - a_2) + ... + (a_{k-1} - a_k) = a_1 - a_k \le 9 - 0 = 9, \text{ analog } b_j - b_1 \le 9$$

Die gesuchte Zahl kann nicht neun oder mehr Ziffern besitzen, weil andernfalls mindestens vier der oben genannten Differenzen positiv oder andere vier negativ wären. Dann wäre aber die fünfte Ziffer nicht größer als $9 - 4 - 3 - 2 - 1 = -1$, oder die letzte Ziffer größer als $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, was beides nicht sein kann. Also besitzt N höchstens acht Ziffern und die Differenzenfolge 3, 2, 1, 0, –1, –2, –3 erzeugt – ausgehend von der ersten Ziffer 9 – die größte konvexe Zahl, nämlich Zahl 96 433 469.

2. Beweis: Wie man leicht mit Kopfrechnen bestätigt, hat die Zahl 96 433 469 acht Ziffern und ist konvex. Die Zahl N hat also mindestens 9 Ziffern oder sie hat 8 Ziffern und ist nicht kleiner als 96 433 469.

Ersetzt man in einer konvexen Zahl mit mindestens 8 Ziffern, die nicht mit Ziffer 9 beginnt, die erste Ziffer durch eine 9, so ist die neue Zahl größer und sicher wieder konvex, weil $b < {}^{(a+c)}/_2 < {}^{(9+c)}/_2$. Die Zahl N beginnt also sicher mit Ziffer 9.

Eine Zahl ist genau dann konvex, wenn für beliebige drei aufeinander folgende ihrer Ziffern a, b, c stets $b < {}^{(a+c)}/_2$ gilt; dies ist wiederum äquivalent zu $c \geq 2b - a + 1$. Ist also $b \geq a$, so werden die Ziffern ab der Ziffer b nach rechts immer größer. Die Darstellung der Zahl N enthält also zuerst eine fallende Ziffernfolge und dann eine steigende.

Zu einer konvexen Zahl $ab...cd$, bei der die Ziffern nach rechts immer kleiner werden, betrachten wir die "nach rechts gespiegelte Zahl" $ab...cddc...ba$. Sie hat mehr Ziffern, ist also sicher größer, und sie ist sicher konvex, da auch an der "Nahtstelle" die Konvexitätsbedingung erfüllt ist: aus $d < c$ folgt, dass auch $d < {}^{(c+d)}/_2$. Dies gilt auch umgekehrt: werden die Ziffern der konvexen Zahl $dc...ba$ nach rechts immer größer, so ist die nach links gespiegelte Zahl $ab...cddc...ba$ ebenfalls konvex.

Hieraus folgt, dass die Darstellung der Zahl N symmetrisch ist, d.h. von der Form $ab...cddc...ba$. Wäre nämlich die Folge der auf–(bzw. ab)steigenden Ziffern kürzer als die der anderen, dann ersetzt man diese Folge durch die Spiegelung der anderen Folge und erhält so eine konvexe Zahl mit mehr Ziffern, also eine größere Zahl. Und sind die Ziffernfolgen verschieden, dann verfährt man entsprechend: man ersetzt diejenige Ziffernfolge, bei er zuerst eine kleinere Ziffer auftaucht, durch das Spiegelbild der anderen, denn auch so erhält man eine größere Zahl.

Zur Konstruktion von N genügt es also, von allen konvexen Zahlen mit fallender Ziffernfolge und erster Ziffer 9 die größte zu nehmen und dann nach rechts zu spiegeln. Dabei wählen wir als folgende Ziffern systematisch alle möglichen, die die Bedingung $c \geq 2b - a + 1$ erfüllen und hören auf, wenn

– die Differenz der Ziffern 1 ist, weil dann die nächste Ziffer entweder gleich ist oder größer;

– wir die Ziffer 0 erreichen.

Alle anderen Zahlen lassen sich um weitere Ziffern ergänzen und so größer machen. Wir erhalten die Zahlen

98, 976, 965, 9643, 9521, 9520, 9532, 954 940, 9410, 9421, 943, 930, 9310, 932, 920, 921, 910.

Die größte dieser Zahlen ist 9643, durch Spiegelung erhalten wir schließlich N = 96 433 469.

Aufgabe 2: Bestimme alle reellen Zahlen x, für die $\left\lfloor \frac{20}{x+18} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+18}{20} \right\rfloor = 1$ gilt.

Erläuterung: Für eine reelle Zahl z bezeichnet $\lfloor z \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich z ist.
Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Antwort: 1. Formulierung: Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist $\mathbf{L} =]-8;2[\cup]2;22[$.

2. Formulierung: Für jede Zahl x mit $-8 < x < 22$ und $x \neq 2$ ist die gegebene Gleichung erfüllt, für alle anderen Zahlen ist die Gleichung nicht erfüllt.

1. Beweis: Sei $A = A(x) := \frac{x+18}{20}$, dann hat die gegebene Gleichung die Form $\lfloor A \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{A} \right\rfloor = 1$. Wir unterscheiden 7 Fälle:

Fall1: $A < 0$. Dann ist auch $\frac{1}{A} < 0$ und somit $\lfloor A \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{A} \right\rfloor \leq (-1) + (-1) = -2$, jedes x mit $A(x) < 0$ also keine Lösung.

Fall 2: $A = 0$. Dann ist $\frac{1}{A}$ nicht definiert, jedes x mit $A(x) = 0$ also keine Lösung.

Fall 3: $0 < A \leq \frac{1}{2}$. Dann ist $\frac{1}{A} \geq 2$ und $\lfloor A \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{A} \right\rfloor \geq 0 + 2 > 1$, jedes x mit $0 < A(x) \leq \frac{1}{2}$ also keine Lösung.

Fall 4: $\frac{1}{2} < A < 1$. Dann ist $1 < \frac{1}{A} < 2$, d.h. $\lfloor A \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{A} \right\rfloor = 0 + 1 = 1$, jedes x mit $\frac{1}{2} < A(x) < 1$ ist also eine Lösung.

Fall 5: $A = 1$. Dann ist $\frac{1}{A} = 1$, d.h. $\lfloor A \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{A} \right\rfloor = 1 + 1 = 2$, jedes x mit $A(x) = 1$ ist also keine Lösung.

Fall 6: $1 < A < 2$. Dann ist $\frac{1}{2} < \frac{1}{A} < 1$, d.h. $\lfloor A \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{A} \right\rfloor = 1 + 0 = 1$, jedes x mit $1 < A(x) < 2$ ist also eine Lösung.

Fall 7: $A \geq 2$. Dann ist $0 < \frac{1}{A} \leq \frac{1}{2}$, d.h. $\lfloor A \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{A} \right\rfloor \geq 2 + 0 > 1$, jedes x mit $A(x) \geq 2$ ist also keine Lösung.

Damit gilt die gegebene Gleichung für genau diejenigen x, für die $\frac{1}{2} < A(x) < 1$ (Fall 4) oder für die $1 < A(x) < 2$ (Fall 6). Diese x lassen sich nun leicht bestimmen:

Es ist $\frac{1}{2} < A(x) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{x+18}{20} < 1 \Leftrightarrow 10 - 18 < x < 20 - 18 \Leftrightarrow -8 < x < 2$.

Es ist $1 < A(x) < 2 \Leftrightarrow 1 < \frac{x+18}{20} < 2 \Leftrightarrow 20 - 18 < x < 40 - 18 \Leftrightarrow 2 < x < 22$.

2. Beweis: Die beiden Brüche in den Gaußklammern sind Bruch und Kehrbruch. Hätte einer von beiden den Wert 0, dann wäre der andere nicht definiert. Also kann keiner den Wert 0 haben und entweder sind beide positiv oder beide negativ. Weiter wissen wir, dass beide ganzzahlig sind.

Die Zahl 1 kann nicht als Summe zweier negativer Zahlen dargestellt werden, und als Summe von zwei nicht negativen Zahlen nur in der Form $0+1$ oder $1+0$. Notwendigerweise gilt also für jede Zahl x aus der Lösungsmenge (mit zusätzlicher Argumentation könnte man hier ein "entweder" einfügen):

$$\left\lfloor \frac{20}{x+18} \right\rfloor = 1 \text{ und } \left\lfloor \frac{x+18}{20} \right\rfloor = 0 \quad (A) \quad \text{oder} \quad \left\lfloor \frac{20}{x+18} \right\rfloor = 0 \text{ und } \left\lfloor \frac{x+18}{20} \right\rfloor = 1 \quad (B).$$

Offensichtlich sind aber auch alle x, die wenigstens eine der beiden Bedingungen A oder B erfüllen, Lösung der gegebenen Gleichung. Diese sind schnell ermittelt: Es gilt

$$\left\lfloor \frac{20}{x+18} \right\rfloor = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le \frac{20}{x+18} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \ge \frac{x+18}{20} > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \ge x > -8 \quad \text{und}$$

$$\left\lfloor \frac{x+18}{20} \right\rfloor = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le \frac{x+18}{20} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -18 \le x < 2.$$

Bedingung (A) ist also erfüllt für genau die Zahlen x mit $-8 < x < 2$.

Weiter gilt (man beachte, dass der Bruch in der ersten Gaußklammer den Wert 0 nicht annehmen kann):

$$\left\lfloor \frac{20}{x+18} \right\rfloor = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{20}{x+18} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+18}{20} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > 2 \quad \text{und}$$

$$\left\lfloor \frac{x+18}{20} \right\rfloor = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le \frac{x+18}{20} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \le x < 22.$$

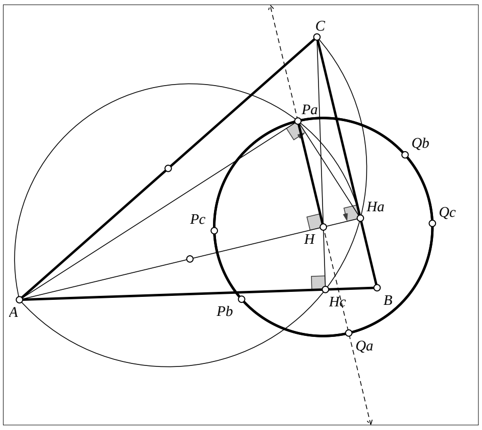
d.h. Bedingung (B) ist genau für die Zahlen x erfüllt, für die $2 < x < 22$.

Zusammenfassend haben wir also $\mathbf{L} = \,]-8;2[\, \cup \,]2;22[$.

Aufgabe 3: Im spitzwinkligen Dreieck ABC wird der Höhenschnittpunkt mit H bezeichnet. Die Höhe von A schneide die Seite BC im Punkt H_a und die Parallele zu BC durch H schneide den Kreis mit Durchmesser AH_a in den Punkten P_a und Q_a. Entsprechend seien die Punkte P_b und Q_b sowie P_c und Q_c festgelegt.

Beweise, dass die sechs Punkte P_a, Q_a, P_b, Q_b. P_c und Q_c auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Bemerkung: Über die Aufgabenstellung hinaus wird gezeigt, dass der Mittelpunkt des gemeinsamen Kreises mit dem Höhenschnittpunkt zusammenfällt.



1. Beweis: Nach Konstruktion liegt der Punkt P_a auf dem Kreis mit Durchmesser AH_a. Nach Satz des Thales ist dann das Dreieck AP_aH_a rechtwinklig bei P_a. Da $P_aH \parallel BC$ und $BC \perp AH_a$, ist auch $P_aH \perp AH_a$, d.h. P_aH ist Höhe im rechtwinkligen Dreieck AP_aH_a auf die Hypotenuse AH_a. Also gilt nach Höhensatz

$$\overline{P_aH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HH_a}.$$

Die Punkte P_a und Q_a sind Schnittpunkte eines Kreises und einer Geraden, die beide symmetrisch bezüglich. der Achse AH_a liegen. Also liegen Q_a und P_a symmetrisch bezüglich der Achse AH_a. Insbesondere gilt $\overline{Q_aH} = \overline{P_aH}$ und somit auch

$$\overline{Q_aH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HH_a}.$$

Analoge Überlegungen ausgehend von den Punkten B bzw. C liefern die Gleichungen

$$\overline{P_bH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{HH_b} = \overline{Q_bH}^2 \quad \text{und} \quad \overline{P_cH}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{HH_c} = \overline{Q_cH}^2.$$

Von hier können wir verschieden schließen:

Variante 1: Weiter sind AH_aC und CH_cA beides rechtwinklige Dreiecke mit gemeinsamer Hypotenuse AC, also liegen die Punkte H_a und H_c auf dem Thaleskreis über der Seite AC. Also erhalten wir nach Sehnensatz und analogen Überlegungen ausgehend von den anderen Höhen das Zwischenergebnis

$$\overline{AH} \cdot \overline{HH_a} = \overline{CH} \cdot \overline{HH_c} = \overline{BH} \cdot \overline{HH_b}. \quad (*)$$

Variante 2: Es ist $\angle BAH_a = 90° - \beta = \angle H_cCB$ und $\angle AHH_c = \angle H_aHC$, also sind die Dreiecke H_aHC und H_cHA ähnlich; hieraus folgt sofort $\overline{AH} \cdot \overline{HH_a} = \overline{CH} \cdot \overline{HH_c}$ und mit analoger Schlussweise ausgehend von den Dreiecken H_bHC und H_cHB erhält man ebenfalls (*).

Nach beiden Varianten folgt $\overline{P_aH}^2 = \overline{Q_aH}^2 = \overline{P_bH}^2 = \overline{Q_bH}^2 = \overline{P_cH}^2 = \overline{Q_cH}^2$ und hieraus, dass H Mittelpunkt eines Kreises ist, auf dem die Punkte P_a, Q_a, P_b, Q_b, P_c und Q_c liegen. Das ist die Behauptung.

Bemerkungen: Der Zusammenhang (*) ist auch als *Höhenabschnittsatz* bekannt.

Aus der Tatsache, dass Q_x und P_x symmetrisch bezüglich der Höhe AH_x ($x \in$ {a,b,c}) liegen, kann man schon vor dem Nachweis der Existenz des gesuchten Kreises folgern, dass sein Mittelpunkt der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC sein muss.

Aufgabe 4: Im Raum sind sechs Punkte gegeben, die paarweise verschiedene Entfernungen voneinander haben und von denen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Wir betrachten alle Dreiecke mit Ecken in diesen Punkten.

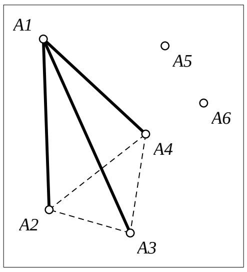
Beweise, dass es unter diesen Dreiecken eines gibt, dessen längste Seite zugleich kürzeste Seite in einem anderen dieser Dreiecke ist.

Bemerkung: Die vorgestellten Beweise gelten alle auch dann, wenn an jede Dreiecksseite irgendeine "Entfernungszahl" ohne Berücksichtigung einer tatsächlichen Realisierbarkeit im Raum geschrieben wurde, d.h. ohne Berücksichtigung der Dreiecksungleichung. Mir ist unbekannt, ob die Verwendung dieser schärferen Voraussetzung auch eine schärfere Aussage ermöglicht.

Bezeichnungen: Die sechs Punkte seien mit A_1, A_2, ... , A_6 bezeichnet. Weiter werden wir im Laufe der Untersuchung in bestimmten Dreiecken die kürzeste Seite rot färben. Da keine zwei Verbindungsstrecken gleich lang sind, ist diese immer eindeutig bestimmt. In jedem Dreieck gibt es mindestens eine gefärbte Seite, es kann vorkommen, dass in einem Dreieck mehrere Seiten gefärbt sind und dass eine Seite mehrfach gefärbt wird. Damit können wir die Formulierung "eine Seite, die in mindestens einem Dreieck die kürzeste Seite ist" abkürzen zu "eine rote Seite". Wenn wir die Existenz eines Dreiecks mit drei gefärbten Seiten nachgewiesen haben, sind wir fertig, weil dieses Dreieck eine längste Seite hat, und diese ist – weil gefärbt – in einem anderen Dreieck kürzeste Seite.

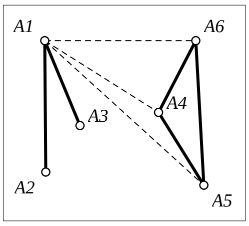
1. Beweis: Wir färben zu Beginn in jedem der Dreiecke die kürzeste Seite rot. Vom Punkt A_1 gehen fünf Verbindungsstrecken zu den anderen Ecken aus. Es können also genau zwei Fälle auftreten:

Fall 1: Drei oder mehr dieser Strecken sind rot gefärbt, o.B.d.A. seien dies A_1A_2, A_1A_3 und A_1A_4 (in der Figur dick gezeichnet). Das Dreieck $A_2A_3A_4$ hat eine kürzeste Seite, o.B.d.A. sei dies A_2A_3. Damit hat das Dreieck $A_1A_2A_3$ drei rot gefärbte Seiten, das war zu zeigen.



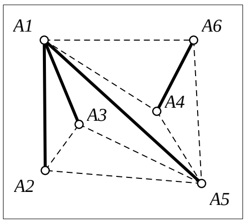
Fall 2: Nicht Fall 1, d.h. es sind weniger als drei Seiten rot gefärbt. Dann sind mindestens drei Seiten nicht gefärbt, o.B.d.A. seien dies A_1A_2, A_1A_3 und A_1A_4 (in der Figur dick gezeichnet). Da jedes der Dreiecke $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$ und $A_1A_2A_4$ mindestens eine gefärbte Seite hat und da keine der von A_1 ausgehenden Seiten gefärbt ist, müssen die Seiten A_2A_3, A_3A_4 und A_4A_2 alle gefärbt sein, d.h. das Dreieck $A_2A_3A_4$ hat drei gefärbte Seiten. Das war zu zeigen.

2. Beweis: Unter den Verbindungsstrecken gibt es genau eine Längste, o.B.d.A. sei dies A_1A_6. Wir färben in jedem Dreieck die kürzeste Seite rot. Es genügt die Existenz eines Dreiecks mit lauter roten Seiten nachzuweisen, weil dann die längste Seite in diesem Dreieck rot und damit gleichzeitig kürzeste Seite in einem anderen Dreieck ist.



In jedem der Dreiecke $A_1A_jA_6$ (j = 2, 3, 4, 5) ist A_1A_6 die längste Seite, also ist genau eine der Seiten A_1A_j oder A_6A_j kürzeste Seite, also rot gefärbt. Also gehen von den Punkten A_1 und A_6 insgesamt mindestens vier rote Strecken aus, unter denen vier die Endpunkte A_2, A_3, A_4 und A_5 haben. O.B.d.A. gehen von Ecke A_1 mindestens zwei rote Strecken aus. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: Von der Ecken A_1 gehen genau zwei rote Strecken aus, o.B.d.A. seien dies A_1A_2 und A_1A_3. Dann sind A_1A_4 und A_1A_5 beide nicht gefärbt, aber A_6A_4 und A_6A_5. Damit kann Im Dreieck $A_1A_4A_5$ nur A_4A_5 gefärbt sein, also ist im Dreieck $A_4A_5A_6$ jede Seite rot gefärbt.



Fall 2: Von der Ecke A_1 gehen mindestens drei rot gefärbte Strecken aus, o.B.d.A. A_1A_2, A_1A_3 und A_1A_5. Die kürzeste Seite im Dreieck $A_2A_3A_5$ wird gefärbt, o.B.d.A. A_2A_3. Dann ist im Dreieck $A_1A_2A_3$ jede Seite gefärbt.

3. Beweis: Die gegebenen Punkte seien mit $A_1, A_2, \ldots, A_6$ bezeichnet. Unter den 6 Punkten gibt es genau $\binom{6}{2} = 15$ Verbindungsstrecken, die genau $\binom{6}{3} = 20$ Dreiecke bilden; jede der Verbindungsstrecken ist Seite in genau $6 - 2 = 4$ Dreiecken.

Wenn es darunter ein Dreieck gibt, in dem jede der Seiten in wenigstens einem Dreieck die kürzeste Seite ist, dann ist die längste der drei Seiten dieses Dreiecks die längste in diesem Dreieck und damit die gesuchte Seite mit beiden Eigenschaften.

Unter der Annahme, dass es kein solches Dreieck gibt, werden wir nachweisen, dass von den 15 Verbindungsstrecken mindestens 8 die kürzeste Seite in wenigstens einem der 20 Dreiecke sind, und dass ebenso mindestens 8 der Verbindungsstrecken in mindestens einem der Dreiecke die längste Seite. Weil $2 \cdot 8 = 16 > 15$, gibt es nach Schubfachprinzip mindestens eine Strecke, die sowohl kürzeste Seite in einem Dreieck als auch längste Seite in einem (anderen!) Dreieck ist.

Hierzu markieren wir in jedem der 20 Dreiecke die kürzeste Seite, d.h. wir verteilen 20 Markierungen auf 15 Seiten, dabei wird keine Seite mehr als 4 Mal markiert. Mit x sei die Anzahl der Seiten bezeichnet, die wenigstens eine Markierung haben, dann ist $4x \geq 20$, insbesondere ist $x \geq 5$.

Nun zählen wir in jeder Ecke A_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) die Anzahl der von ihr ausgehenden Strecken, die wenigstens eine Markierung besitzen, ihre Anzahl sei k_i. Da jede solche Seite genau zwei Endpunkte hat, gilt $\sum_{i=1}^{6} k_i = 2x$.

Wenn zwei von der Ecke A_r ausgehende Strecken A_rA_s und A_rA_t beide mindestens eine Markierung haben, dann kann nach Annahme die Strecke A_sA_t nicht kürzeste Strecke im Dreieck $A_rA_sA_t$ sein. Sie kann also aus diesem Dreieck keine Markierung erhalten haben. Die Gesamtzahl solcher Paare von Strecken ist $\sum_{i=1}^{6} \binom{k_i}{2}$, für jedes solche Paar sinkt die Maximalzahl an Markierungen für irgendeine Strecke um 1. Damit können wir schärfer abschätzen, es gilt

$$4x - \sum_{i=1}^{6} \binom{k_i}{2} \geq 20 \text{ mit der Nebenbedingung } \sum_{i=1}^{6} k_i = 2x.$$

Es bleibt zu zeigen, dass diese Gleichung für $x = 5, 6, 7$ nicht erfüllt werden kann. Hierzu verwenden wir die Abschätzung $\binom{k_i}{2} \geq k_i - 1$:

Für $x \leq 6$ erhalten wir den Widerspruch

$$20 \leq 4x - \sum_{i=1}^{6} \binom{k_i}{2} \leq 4x - \sum_{i=1}^{6} (k_i - 1) = 4x - (2x - 6) = 2x + 6 \leq 18.$$

Für $x = 7$ bemerken wir noch, dass $\sum_{i=1}^{6} k_i = 2x = 14$, d.h. es gibt ein $k_i \geq 3$. Für dieses k_i gilt dann die Abschätzung $\binom{k_i}{2} \geq k_i$, dies führt zum Widerspruch

$$20 \leq 4x - \sum_{i=1}^{6} \binom{k_i}{2} \leq 4x - \sum_{i=1}^{6} (k_i - 1) + 1 \leq 28 - (14 - 5) = 19.$$

Der Beweis dafür, dass auch mindestens 8 der Verbindungsstrecken längste Seite in mindestens einem Dreieck sind, erfolgt in völlig analoger Weise, indem man das Wort "kürzeste" durch das Wort "längste" ersetzt.

Bemerkung: Den Fall $x \leq 5$ können wir auch durch die erste Überlegung im 4. Beweis ausschließen.

4. Beweis: Wir werden nachweisen, dass es

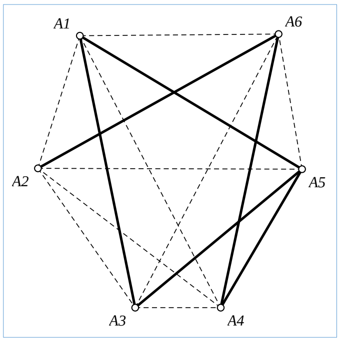
– ein Dreieck gibt, in dem jede Seite kürzeste (oder längste) Seite in irgendeinem Dreieck ist. Dann ist in diesem Dreieck die längste (die kürzeste) Seite die gesuchte Seite;

oder dass

– es 8 Seiten gibt, die in irgendeinem Dreieck die kürzeste Seite sind. Dabei werden wir nur Beweismethoden benützen, bei denen "kürzest" und "längst" vertauscht werden können. Dann gibt es auch 8 Seiten, die in irgendeinem Dreieck die längste Seite sind. Weil $2 \cdot 8 = 16 > 15$, gibt es nach Schubfachprinzip wenigstens eine Seite, die sowohl kürzeste Seite in einem Dreieck als auch längste in irgendeinem anderen Dreieck ist.

Wir wählen die Bezeichnung der Punkte so, dass A_1A_6 die längste aller Strecken ist und A_2A_5 die längste der Verbindungsstrecken unter den von A_1 und A_6 verschiedenen restlichen Punkten. Angelehnt an die nebenstehende Skizze, die auf tatsächliche Entfernungen keine Rücksicht nimmt, nennen wir die Strecken A_1A_6, A_2A_5 und A_3A_4 die *waagrechten* Strecken, die anderen sind *schräge* Strecken. Zunächst färben wir alle Strecken grün, später werden wir einige Strecken, von denen wir wissen, dass sie in irgendeinem Dreieck kürzeste Seite sind, rot umfärben. Es genügt dann zu zeigen, dass es ein rotes Dreieck gibt oder dass wir acht Seiten rot einfärben können.

Hierzu betrachten wir die vier Dreiecke mit Grundseite A_1A_6. Diese Strecke ist die längste aller Strecken, kann also in keinem Dreieck kürzeste Seite sein. Also ist von den beiden Strecken A_1A_i und A_6A_i (i = 2, 3, 4, 5) die kürzere die kürzeste Seite im Dreieck $A_1A_iA_6$. Analog ist von den beiden Strecken A_2A_j und A_5A_j (j = 3, 4) die kürzere die kürzeste Seite im Dreieck $A_2A_jA_5$. Keine der betrachteten Strecken kommt in zwei Dreiecken vor, also haben wir bis jetzt durch Betrachten von sechs Dreiecken unter den zwölf schrägen Strecken genau sechs verschiedene gefunden, die in mindestens einem Dreieck kürzeste Seite sind. Diese sechs Strecken färben wir rot (beispielhaft in der Figur, die roten Strecken sind dick gezeichnet).

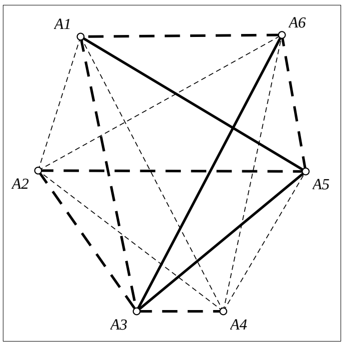


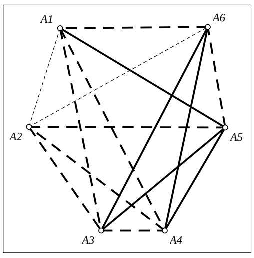
Es bleibt dann noch zu zeigen, dass wir entweder noch zwei weitere grüne Strecken auf rot umfärben können, oder dass es ein rotes Dreieck gibt, d.h. ein Dreieck, in dem jede Seite kürzeste Seite wenigstes eines Dreiecks ist. In diesem Dreieck hat die längste Seite die gesuchte Eigenschaft.

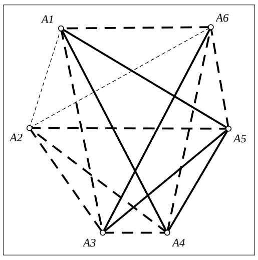
Wir wissen, dass die waagerechten Strecken noch grün sind. Weiter wissen wir, dass von den beiden Strecken A_3A_2 und A_3A_5 genau eine grün ist und die andere rot. Gleiches gilt für die Streckenpaare A_3A_1 und A_3A_6, A_4A_2 und A_4A_5, A_4A_1 und A_4A_6, A_2A_1 und A_2A_6 sowie A_5A_1 und A_5A_6.

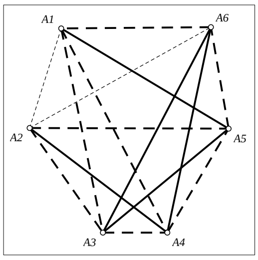
O.B.d.A. seien A_3A_2 und A_3A_1 grün (andernfalls vertauschen wir die Bezeichnungen von A_2 und A_5 bzw. von A_1 und A_6). Dann sind A_3A_5 und A_3A_6 rot; und wenn A_5A_6 ist rot ist, dann sind im Dreieck $A_3A_5A_6$ alle drei Seite rot und wir sind fertig.

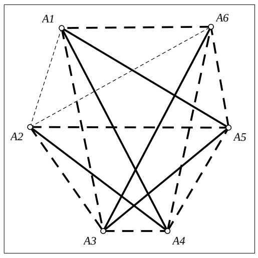
Für die restliche Untersuchung gehen wir also davon aus, dass die Strecke A_5A_6 grün ist und deswegen die Strecke A_1A_5 rot ist. Diese Situation ist in nebenstehender Figur dargestellt (rote Strecken dick durchgezogen, grüne Strecken dick gestrichelt, von den dünn gestrichelten Strecken sind genau drei grün). Von A_4 gehen vier dünn gestrichelte Strecken aus, genau zwei davon sind rot. Die dabei möglichen vier Fälle werden in einer Fallunterscheidung untersucht:











In allen vier Fällen beachte man, dass auch eine der beiden Seiten A_1A_2 und A_6A_2 rot ist. (In obiger Skizze sind beide Strecken noch dünn gestrichelt.)

Fall 1: A_4A_1 und A_4A_2 sind grün. Dann sind A_4A_6 und A_4A_5 rot und in den Dreiecken $A_2A_3A_4$ und $A_1A_3A_4$ alle Seiten grün. Wir färben in diesen beiden Dreiecken die kürzeste Seite rot. Falls wir dabei zwei weitere rote Strecken erzeugt haben, sind wir fertig, weil wir acht verschiedene rote Strecken nachgewiesen haben Falls nicht, haben wir in beiden Dreiecken die einzige gemeinsame Strecke A_3A_4 rot gefärbt. Dann bedenken wir, dass auch A_3A_6 und A_4A_6 rot sind und damit jede Seite im Dreieck $A_3A_4A_6$ rot ist.

Fall 2: A_4A_2 und A_4A_6 sind grün: Da A_4A_6 grün ist, ist A_4A_1 rot, also auch das Dreieck $A_1A_4A_5$.

Fall 3: A_4A_1 und A_4A_5 sind grün: Falls A_2A_6 rot ist, ist das Dreieck $A_2A_4A_6$ rot; und falls A_2A_6 grün ist, sind die Dreiecke $A_1A_3A_4$ und $A_2A_5A_6$ grün. Sie haben keine gemeinsamen Seiten, also können wir in beiden eine weitere Seite rot färben und haben so insgesamt acht rote Seiten.

Fall 4: A_4A_6 und A_4A_5 sind grün: Falls A_2A_1 rot ist, ist das Dreieck $A_1A_2A_4$ rot, und falls A_2A_1 grün ist, sind die Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $A_4A_5A_6$ grün; und da sie keine gemeinsamen Seite haben, können wir in beiden eine weitere Seite rot färben und haben so insgesamt acht rote Seiten.

Schließlich bemerken wir noch, dass wir im vorliegenden Beweis überall die Worte "kürzest" und "längst" vertauschen können.

5. Beweis (eine Zeichnung möge man ergänzen): Wir zeichnen zu den sechs Punkten nacheinander die Verbinungsstrecken ein, und zwar in absteigender Reihenfolge ihrer Länge, beginnend mit der Längsten. Wir hören auf zu zeichnen, wenn zum ersten Mal ein vollständiges Dreieck entstanden ist (diese Situation wird sicher irgedwann eintreten). Die Endpunkte der zuletzt gezeichneten Strecke bezeichnen wir mit A_1 und A_2, den dritten Punkt eines Dreiecks (evtl. können mit Einzeichnen der Strecke A_1A_2 mehrere Dreiecke entstanden sein) mit A_3. Nach Konstruktion ist also A_1A_2 kürzeste Seite im Dreieck $A_1A_2A_3$ und es gibt kein weiteres vollständig eingezeichnetes Dreieck, das nicht die Strecke A_1A_2 enthält. Für die weitere Überlegung unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: Es gibt einen weiteren Punkt A_4, für den zu diesem Zeitpunkt weder die Strecke A_1A_4 noch A_2A_4 eingezeichnet ist. Dann sind diese beiden Strecken kürzer als A_1A_2. Also ist A_1A_2 längste Seite im Dreieck $A_1A_2A_4$ und kürzeste Seite im Dreieck $A_1A_2A_3$.

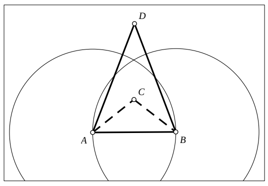
Fall 2: Nicht Fall 1, d.h. jeder der drei restlichen Punkte A_4, A_5 und A_6 ist zu diesem Zeitpunkt mit wenigstens einem der Punkte A_1 oder A_2 verbunden. Nach Schubfachprinzip ist einer der beiden Punkte A_1 oder A_2 mit wenigstens zweien dieser Punkte verbunden, o.B.d.A. sei A_1 mit A_4 und A_5 verbunden. Da bis zu diesem Zeitpunkt nur Dreiecke mit Seite A_1A_2 vollständig eingezeichnet sind, ist keine Seite des Dreiecks $A_3A_4A_5$ eingezeichnet, d.h. jede Seite dieses Dreiecks ist kürzer als A_1A_2, A_1A_4 und A_1A_5. Damit ist die längste Seite im Dreieck $A_3A_4A_5$ gleichzeitig kürzeste Seite im Dreieck, das sie mit der Ecke A_1 bildet.

6. Beweis: Wir bezeichnen die Endpunkte der achtlängsten Strecke mit A und B, d.h. es sind genau sieben der 15 Verbindungsstrecken länger als AB, wir nennen sie "*lang*". Ebenso gilt, dass genau sieben Verbindungsstrecken kürzer sind, diese nennen wir "*kurz*". Ein Dreieck, das aus lauter kurzen oder lauter langen Seiten besteht, heiße *kurz* bzw. *lang*.

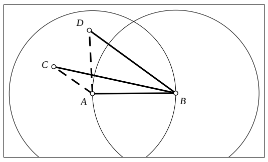
Die Lage der restlichen vier Punkte – sie seien mit C, D, E und F bezeichnet – klassifizieren wir danach, ob ihre Verbindungsstrecken zu A bzw. B kurz oder lang sind und beschreiben dies mit zwei

"Koordinaten" k bzw. l. Die Bezeichnung $C(k|l)$ soll bedeuten, dass die Strecke AC kurz, die Strecke BC lang ist. (Dies kann man auch geometrisch beschreiben: C liegt innerhalb der Kugel um A mit Radius AB, aber außerhalb der Kugel um B mit Radius AB.)

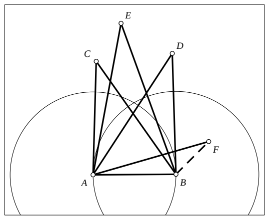
Es sei zunächst bemerkt, dass es nur sieben kurze und nur sieben lange Strecken gibt, d.h. dass unter den 16 Koordinaten höchstens sieben Mal der Buchstabe k auftreten kann, ebenso der Buchstabe l höchstens sieben Mal. Es können also nicht alle vier restlichen Punkte Koordinaten $(k|k)$ haben, ebensowenig alle die Koordinaten $(l|l)$.



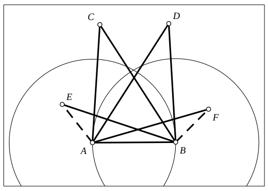
Fall 1: Es gibt einen Punkt mit den Koordinaten $(k|k)$ und einen mit den Koordinaten $(l|l)$, also $C(k|k)$ und $D(l|l)$. Dann ist AB kürzeste Seite im Dreieck ABD und gleichzeitig längste Seite im Dreieck ABC.



Fall 2: Es gibt zwei Punkte mit den Koordinaten $(k|l)$, also $C(k|l)$ und $D(k|l)$. Falls CD kurz ist, dann ist das Dreieck ACD kurz und seine längste Seite bildet zusammen mit dem Punkt B ein Dreieck, in dem diese Seite die kürzeste Seite ist; und falls CD lang ist; dann ist das Dreieck BCD lang und seine kürzeste Seite die längste Seite in dem Dreieck, die diese Seite zusammen mit dem Punkt A bildet.



Fall 3: Es gibt genau drei Punkte mit den Koordinaten $(l|l)$ und weder Fall 1 noch Fall 2 tritt ein, also $C(l|l)$, $D(l|l)$, $E(l,l)$ und o.B.d.A. $F(l|k)$. Dann ist die Koordinate l bereits sieben Mal vergeben, d.h. die sieben langen Strecken sind genau AC, AD, AE, AF, BC, BD, BE. Insbesondere sind die Seiten des Dreiecks CDE alle kurz, damit ist die längste dieser drei Seiten die längste Seite im Dreieck CDE und gleichzeitig die kürzeste Seite in dem Dreieck, das sie zusammen mit dem Punkt A (oder auch B) bildet.

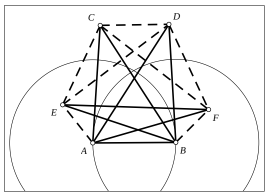


Fall 4: Es gibt genau zwei Punkte mit den Koordinaten $(l|l)$ und weder Fall 1 noch Fall 2 tritt ein, also $C(l|l)$, $D(l|l)$, o.B.d.A. $E(k|l)$ und $F(l|k)$ (falls $E(l|k)$ und $F(k|l)$ vorliegt, vertauschen wir im Folgenden die Bezeichnungen E und F). Dann sind die sechs Strecken AC, AD, AF, BC, BD und BE lang, und da AE und BF kurz sind, ist genau eine der sechs Verbindungsstrecken unter den Punkten C, D, E und F lang und alle anderen kurz. Diese Unterfälle untersuchen wir einzeln:

Fall 4.1: CD ist lang: Dann ist das Dreieck ACD und insbesondere seine kürzeste Seite lang, und da AE, CE und DE kurz sind, ist die kürzeste Seite im Dreieck ACD längste Seite im Dreieck, das diese Seite mit E bildet.

Fall 4.2: CE ist lang: (der Fall "DF lang" kann analog behandelt werden, indem man die Bezeichnungen A mit B, C mit D und E mit F vertauscht): Dann ist das Dreieck BCE lang und für seine Seiten gilt: BE ist längste Seite im Dreieck ABE, die Seite EC ist längste Seite im Dreieck EFC und BC ist längste Seite im Dreieck BCF. Die kürzeste dieser drei Seiten ist die gesuchte.

Fall 4.3: CF ist lang (der Fall DE lang analog): Dann ist das Dreieck ACF lang und AC längste Seite im Dreieck AEC, CF ist längste Seite im Dreieck ECF und FA ist längste Seite im Dreieck Dreieck AEF. Die restliche Argumentation erfolgt wie im Fall 4.2.



Fall 4.4: EF ist lang: Ein Blick auf die Figur bestätigt folgende Eigenschaft: Jede kurze Seite ist Seite eines Dreiecks mit zwei langen Seiten, aber jede kurze Seite ist auch Seite eines kurzen Dreiecks. Nun wählen wir von den kurzen Seiten die längste: Sie ist dann längste Seite in "ihrem" kurzen Dreieck und kürzeste Seite in dem Dreieck, das sie mit zwei langen Seiten bildet.

Fall 5: Alle restlichen Fälle, d.h. es gibt höchstens einen Punkt mit den Koordinaten $(l|l)$ und nicht Fall 2. Dann gibt es mindestens zwei Punkte mit Koordinaten $(k|k)$. Nun vertauschen wir die Koordinaten k und l sowie die Bezeichnungen kurz und lang und führen den Beweis wie in den Fällen 1 bis 4.

Bemerkung: Der Satz gilt für sechs oder mehr Punkte im Raum, nicht aber für fünf Punkte oder weniger.