BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2019

Vorläufige Fassung

April 2019

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: April 2019

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

STIFTERVERBAND

KULTUSMINISTER KONFERENZ

HDI talanx.

GEFÖRDERT VON GESAMTMETALL

think ING.

Aufgabe 1: Ein 8x8–Schachbrett wird mit 32 Dominosteinen der Größe 1x2 vollständig und überschneidungsfrei bedeckt.

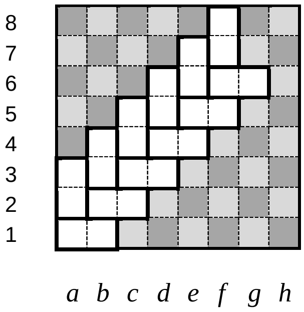
Beweise: Es gibt stets zwei Dominosteine, die ein 2x2–Quadrat bilden.

Vorbemerkung: Wir verkürzen gelegentlich den Begriff "Dominostein" zu "Stein". Eine Bedeckung eines ebenen Flächenstückes mit Teilflächen, die vollständig und überschneidungsfrei ist, nennen wir eine *Parkettierung*.

Bei jeder Parkettierung des Schachbrettes mit Dominosteinen liegt jeder Dominostein so, dass er genau zwei Felder des Schachbrettes bedeckt, d.h. die Ränder der Dominosteine liegen parallel zu den Rändern des Schachbrettes. Dies wird in den Beweisen nicht eigens erwähnt.

1. Beweis: Für die weitere Argumentation übernehmen wir die Notation wie beim Schachspiel: Jedes Feld wird durch seine "Koordinaten" beschrieben; dabei verwenden wir für die Zeilen die Zahlen 1 bis 8, für die Spalten die Buchstaben a bis h. Einen Dominostein in einer Parkettierung bezeichnen wir durch die Koordinaten der Felder, die er bedeckt.

Jedes Feld des Schachbrettes muss bedeckt sein. Wir betrachten einzelne (für unsere Argumentation geeignete) Felder des Schachbrettes und überlegen uns, auf welche Arten diese von den Steinen bedeckt werden können, wenn wir Lagen ausschließen, bei denen 2 Steine ein 2x2–Quadrat bilden. (Natürlich schließen wir auch aus, dass ein Feld von zwei Steinen bedeckt wird.) Wenn wir feststellen, dass es zwei benachbarte Felder gibt, die in allen Parkettierungen vom gleichen Stein bedeckt werden, legen wir diesen Stein auf das Schachbrett. Wir werden zeigen, dass wir – bevor alle Felder bedeckt sind – dann irgendwann nicht mehr legen können, ohne dass zwei Steine ein 2x2–Quadrat bilden oder dass ein Feld nicht mehr überdeckt wird.



Wir beginnen mit dem Feld $a1$. Bedingt durch die Lage dieses Feldes und durch die Form der Steine kann es nur durch einen Stein bedeckt werden, der entweder zusätzlich das Feld $a2$ oder das Feld $b1$ bedeckt. Wir betrachten den Fall, dass er auch $b1$ überdeckt. Falls er $a2$ überdeckt, können wir die folgende Argumentation übernehmen, wenn wir die Bezeichnungen "Zeilen" und "Spalten" vertauschen. Wenn wir ihn also auf $a1b1$ legen (d.h. scheinbar nur eine von zwei Möglichkeiten betrachten), haben wir doch alle möglichen Parkettierungen berücksichtigt.

Nun überlegen wir, wie der Stein, der das Feld $a2$ bedeckt, liegen kann. Da das Feld $a1$ schon belegt ist, gibt es zunächst nur zwei Möglichkeiten: die Lage $a2a3$ oder $a2b2$. In der Lage $a2b2$ würde er aber mit $a1b1$ ein Quadrat bilden, sodass nur die Lage $a2a3$ möglich ist. Wir legen ihn also auf $a2a3$; es entsteht zwangsweise eine L–förmige Konfiguration der zwei Steine $a1b1$ und $a2a3$ über dem Feld $a1$.

Als nächstes betrachten wir den Stein, der das Feld $b2$ bedeckt. Ähnlich wie im vorigen Abschnitt können wir argumentieren, dass die Lage $b2b3$ ausscheidet, da er dann mit $a2a3$ ein Quadrat bildet, also bleibt nur die Lage $b2c2$; und für den Stein, der $b3$ bedeckt, nur die Lage $b3b4$. Die L–förmige Konfiguration über dem Feld $a1$ erzwingt also eine gleiche L–förmige Konstellation über dem Feld $b2$.

Für die Steine, die die Felder auf der Diagonalen, also $c3$, $d4$, $e5$, $f6$ bedecken, argumentieren wir in dieser Reihenfolge analog und erhalten so, dass auch über dem Feld $f6$ eine solche L–förmige Konfiguration besteht, d.h. ein Stein hat die Lage $f6g6$, ein anderer $f7f8$, vgl. Figur. Nun können wir verschieden schließen:

Variante 1: Schließlich muss der Stein, der $g7$ bedeckt, die Lage $g7h7$ haben, um zu vermeiden, dass er mit dem Stein $f7f8$ ein Quadrat bildet. So bleiben aber im rechten oberen Eck am Rand des Schachbrettes die Felder $g8$ und $h8$ unbedeckt. Diese können nur mit dem Stein $g8h8$ überdeckt werden und bilden dann mit dem Stein $g7h7$ ein Quadrat aus zwei Steinen.

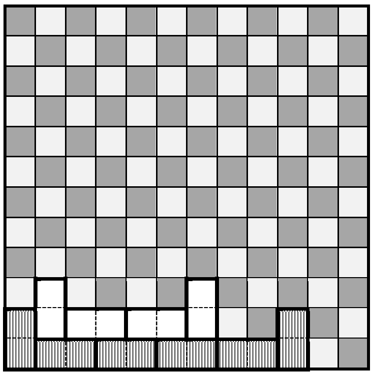
Variante 2: Nun ist das Schachbrett in zwei Bereiche mit noch freien Feldern aufgeteilt, der eine Bereich enthält genau 15 Felder, also eine ungerade Anzahl. Dieser Bereich kann aber nicht mit Steinen, die alle eine gerade Anzahl von Feldern bedecken, vollständig und überschneidungsfrei belegt sein.

Bemerkung: Die Reihenfolge, in der wir bei obiger Betrachtung die Felder auswählen, ist beliebig. Wichtig ist nur, dass es für die Lage des betrachteten Steines nur eine Möglichkeit gibt. So hätten wir auch nach dem Legen von $b3b4$ das Feld $a4$ betrachten können und folgern, dass ein Stein auf $a4a5$ liegt muss. "Dass es nicht weitergeht" hätte man dann evtl. früher erkennen können. Auch die Verwendung anderer Argumente (z.B. wie in Variante 2) kann evtl. schneller zum Ziel führen.

Variante (Formulierung als Widerspruchsbeweis, sehr knapp gehalten): Wir nehmen an, es gäbe eine Parkettierung, die (i) vollständig und (ii) überschneidungsfrei und (iii) quadratfrei ist. In einer solchen Parkettierung liegt der Stein, der $a1$ bedeckt, o.B.d.A. in der Lage $a1b1$. Wie oben können wir folgern, dass es sechs L–Konfigurationen auf der Diagonalen gibt. Nun ergibt sich auf zweifache Art ein Widerspruch: Wenn man die Bedingung (i) und (ii) erfüllen möchte, sind die Felder $g7$, $g8$, $h7$ und $h8$ nicht quadratfrei; oder im abgeschlossenen Bereich links mit 15 Feldern kann aus Paritätsgründen nicht (i) und (ii) gleichzeitig erfüllt sein.

2. Beweis (durch Widerspruch): Über die Aufgabenstellung hinaus zeigen wir, dass die Aussage nicht nur für ein 8x8–Schachbrett gilt, sondern auch für jedes Schachbrett mit geradzahliger Kantenlänge. (Für eine ungeradzahlige Kantenlänge gibt es keine Parkettierung, weil dann die Gesamtzahl der bedeckten Felder stets gerade ist, die Gesamtzahl der zu bedeckenden Felder aber ungerade.)

Wir nehmen an, dass es eine Parkettierung des Schachbrettes gibt, ohne dass es zwei Steine gibt, die ein Quadrat bilden. Von einer solchen Parkettierung betrachten wir einen Stein, der ein Eckfeld bedeckt. Eine der langen Seiten dieses Steines berührt eine Randseite des Schachbrettes; diese Randseite nennen wir den *linken* Rand, und die Randseite, die eine der beiden kurzen Seiten dieses Steines berührt, nennen wir den *unteren* Rand. Die Lage eines Steines nennen wir *senkrecht* bzw. *waagerecht*, wenn seine lange Seite parallel zum linken bzw. parallel zum unteren Rand des Schachbrettes ist.



Der Stein im linken unteren Eck liegt also senkrecht, er bedeckt ein Feld der untersten Reihe des Schachbrettes. Da die Anzahl der Felder entlang des unteren Randes gerade ist, und jeder Stein in waagerechter Lage genau zwei Felder entlang des unteren Randes bedeckt, gibt es mindestens einen zweiten senkrecht liegenden Stein, der den unteren Rand berührt.

Im Rechteck, das durch zwei aufeinanderfolgende senkrecht liegende Steine bestimmt ist, liegt am unteren Rand eine Anzahl waagerecht liegender Steine. Die Anzahl dieser Steine sei $k \geq 0$, dann besteht dieses Rechteck aus zwei waagerechten Reihen von je $2k + 2$ Feldern des Schachbrettes. Eine solche Konfiguration nennen wir eine *Wanne der Länge* $2k + 2$ (in der Figur dargestellt für $k = 4$ mit schraffierten Steinen).

Falls $k = 0$, haben wir einen Widerspruch zur Annahme, da die beiden senkrecht liegenden Steine nebeneinander liegen und so ein Quadrat bilden.

Falls $k \neq 0$, betrachten wir den Stein, der das Feld in der linken unteren Ecke der Wanne bedeckt: Er liegt nicht waagerecht, da er entgegen der Annahme mit dem ersten Stein am unteren Rand der Wanne ein Quadrat bilden würde. Er liegt also senkrecht, die restliche Länge der Wanne ist ungerade. Also gibt es einen zweiten senkrecht liegenden Stein und wir können mit gleicher Argumentation wie oben die Existenz einer Wanne nachweisen, deren Länge nun höchstens $2(k - 1) + 2$, also kleiner ist, und die eine waagerechte Reihe höher liegt.

Wiederholte Anwendung dieser Argumentation liefert entweder die Existenz einer Wanne mit $k = 0$, oder die Existenz einer Wanne, bei der die senkrecht liegenden Steine den oberen Rand des Schachbrettes berühren. Im ersten Fall haben wir den Widerspruch direkt, im zweiten Fall mit der Überlegung, dass diese Wanne nur so parkettiert werden kann, dass jeder der restlichen Steine mit dem darunter liegenden ein Quadrat bildet.

3. Beweis (kombinatorisch): Die Anzahl der 2x2–Teilquadrate auf dem Schachbrett beträgt $7^2 = 49$. Die Anzahl der Steine, die den Rand mit einer langen Seite berühren, sei r. Jeder dieser Steine liegt in genau einem solchen 2x2–Quadrat, es gilt $r \le 2{\cdot}4 + 2{\cdot}3 = 14$. Jeder andere Stein liegt in genau zwei solchen 2x2–Teilquadraten. Da das Schachbrett 64 Felder hat und jeder Stein genau zwei Felder davon bedeckt, gibt es $32 - r$ solche Steine.

Nun versehen wir jedes Quadrat für jeden Stein, der in ihm liegt, mit einer Markierung. Nach oben Gesagtem gibt es $r + 2 \cdot (32 - r) = 64 - r \ge 64 - 14 = 50$ Markierungen. Nach Schubfachprinzip gibt es also mindestens ein Quadrat mit zwei Markierungen, in diesem liegen also zwei Steine.

Variante: Die Mittelpunkte der beiden langen Seiten jedes Steines nennen wir SMP. Jeder SMP liegt bei jeder Parkettierung auf einer Ecke eines Feldes des Schachbrettes. Wenn zwei SMP auf der gleichen Ecke eines Feldes liegen, dann bilden die beiden dazugehörenden Steine ein 2x2–Quadrat. Dies kann nur auf einer inneren Ecke des Schachbrettes geschehen, es gibt genau $7^2 = 49$ solche inneren Ecken. Da jede Parkettierung 64 : 2 Steine enthält, gibt es $(64 : 2) \cdot 2 = 64$ solche SMPs. Von diesen 64 SMPs können höchstens 14 am Rand liegen, d.h. es liegen mindestens $64 - 14 = 50$ SMPs im Innern des Schachbrettes. Nach Schubfachprinzip gibt es also mindestens eine Ecke, an der zwei SMPs zusammenkommen. Das war zu zeigen.

4. Beweis (kombinatorisch): Das Schachbrett hat 64 Felder, jeder Stein belegt genau zwei Felder, also werden in jeder Parkettierung des Schachbrettes $64 : 2 = 32$ Steine verwendet.

Die Ecken der einzelnen Felder auf dem Schachbrett nennen wir *Knoten*, im Innern des Schachbrettes gibt es $7 \cdot 7 = 49$ Knoten. Die Ränder der einzelnen Felder nennen wir *Kanten*, und diejenigen Kanten, auf denen Ränder von Steinen liegen, nennen wir *Fugen* (die entstehen würden, wenn wir das Schachbrett mit dominoförmigen Fliesen fliesen). Im Innern des Schachbrettes gibt es $2 \cdot 8 \cdot 7 = 112$ Kanten, davon sind 32 von der Mittellinie eines Steins überdeckt, also keine Fugen. Damit gibt es im Innern des Schachbrettes genau $112 - 32 = 80$ Fugen.

Von jedem der Knoten gehen genau 2 oder genau 3 oder genau 4 Fugen aus, dies ist bedingt durch die Form der Steine. Ein Knoten ist genau dann der Mittelpunkt eines Quadrates aus zwei Steinen, wenn er im Innern des Schachbrettes liegt und von ihm genau zwei Fugen ausgehen. Es genügt also zu zeigen, dass es mindestens einen solchen Knoten gibt.

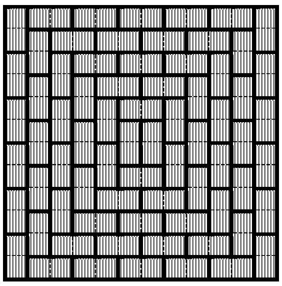
Seien z, d und v die Anzahl der Knoten im Innern des Schachbrettes, von denen genau 2 bzw. genau 3 bzw. genau 4 Fugen ausgehen, dann gilt $z + d + v = 49$. Weiter sei a die Anzahl der Knoten auf dem Rand, von denen eine Fuge ins Innere des Schachbrettes geht; offensichtlich ist die Anzahl dieser Knoten gleich der Anzahl der Steine, die den Rand berühren. Von solchen Knoten geht übrigens jeweils genau eine Kante ins Innere.

So können wir a abschätzen: Die 4 Steine in den Ecken haben je genau 3 Fugen am Rand, die übrigen höchstens 2, also ist $4 \cdot 3 + 2(a - 4) \ge 32$ und somit $a \ge 14$.

Nun zählen wir die Fugen im Innern des Schachbrettes, indem wir von jedem inneren Knoten die Anzahl der von ihm ausgehenden inneren Fugen addieren und das Ergebnis durch 2 teilen (weil jede Kante doppelt gezählt wird). Es ergibt sich

$$\begin{aligned} 80 &= {}^1\!/_2(2z + 3d + 4v + a) \\ &\ge {}^1\!/_2(2z + 3(d + v) + a) \ge {}^1\!/_2(2z + 3(49 - z) + 14) \\ &= {}^1\!/_2(161 - z), \end{aligned}$$

woraus sofort $z \ge 161 - 2 \cdot 80 = 1$ folgt. Das war zu zeigen.



Bemerkung: Für $v = 0$ und $a = 14$ ist die Abschätzung scharf. Tatsächlich kann man jedes $(2N\text{x}2N)$–Schachbrett so parkettieren, dass es nur ein Quadrat aus zwei Steinen gibt, vgl. Figur (die den analogen Fall eines 12x12–Schachbrettes behandelt).

Aufgabe 2: Die Buchstaben A, C, F, H, L und S stehen für sechs nicht notwendigerweise verschiedene Ziffern im Dezimalsystem, wobei $S \neq 0$ und $F \neq 0$ ist. Aus ihnen werden die sechsstelligen Dezimaldarstellungen $SCHLAF$ und $FLACHS$ zweier Zahlen gebildet.

Beweise: Die Differenz dieser beiden Zahlen ist genau dann durch 271 teilbar, wenn $C = L$ und $H = A$ gilt.

1. Beweis: Es ist $SCHLAF - FLACHS$

$$= (S-F)\cdot 10^5 + (C-L)\cdot 10^4 + (H-A)\cdot 10^3 + (L-C)\cdot 10^2 + (A-H)\cdot 10 + (F-S)$$

$$= (S-F)\cdot(10^5-1) + 10^2\cdot(C-L)\cdot(10^2-1) + 10\cdot(H-A)\cdot(10^2-1).$$

Wie man leicht nachrechnet, ist $10^5 - 1 = 99\,999 = 369 \cdot 271$, und 271 ist eine Primzahl.

"$\Leftarrow$" Falls nun $C = L$ und $H = A$, also $C - L = 0$ und $H - A = 0$, bleibt

$$SCHLAF - FLACHS = (S-F)\cdot(10^5-1) = (S-F)\cdot 369\cdot 271;$$

diese Zahl ist offensichtlich durch 271 teilbar.

"$\Rightarrow$" Sei die Differenz durch 271 teilbar. Es gilt $-9 \leq (S-F) \leq 9$, $-9 \leq (C-L) \leq 9$ und $-9 \leq (H-A) \leq 9$, ferner gilt auch

$SCHLAF - FLACHS$

$$= (S-F)\cdot(10^5-1) + 10^2\cdot(C-L)\cdot(10^2-1) + 10\cdot(H-A)\cdot(10^2-1).$$

$$= (S-F)\cdot 369\cdot 271 + 10\cdot(10^2-1)\cdot(10\cdot(C-L) + (H-A)).$$

Da diese Summe durch 271 teilbar ist und aus zwei Summanden besteht, von denen der erste ebenfalls durch 271 teilbar ist, muss auch der zweite Summand durch 271 teilbar sein; und da keiner der Faktoren 10 und $(10^2 - 1)$ des zweiten Summanden den Primfaktor 271 enthält, muss der letzte Faktor des zweiten Summanden, also $10 \cdot (C-L) + (H-A)$, durch 271 teilbar sein. Da C, L, H und A Ziffern sind, ist

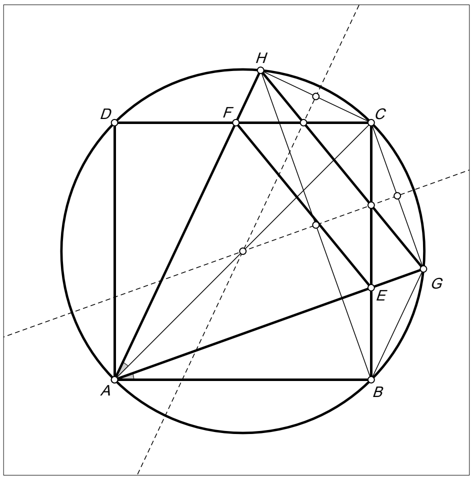
$$-271 < -99 \leq 10\cdot(C-L) + (H-A) \leq +99 < 271.$$

Einzige Möglichkeit ist also $10 \cdot (C-L) + (H-A) = 0$, und da $10 \cdot (C-L)$ Endziffer 0 hat, muss dies auch die Endziffer von $H - A$ sein; und da die beteiligten Zahlen Ziffern sind, ist die einzige Möglichkeit $H - A = 0$, was wiederum $C - L = 0$ nach sich zieht. Das war zu zeigen.

Aufgabe 3: Im Quadrat $ABCD$ werden auf der Seite BC der Punkt E und auf der Seite CD der Punkt F so gewählt, dass $\angle EAF = 45°$ gilt und weder E noch F Eckpunkte des Quadrates sind. Die Geraden AE und AF schneiden den Umkreis des Quadrates außer im Punkt A noch in den Punkten G bzw. H.

Beweise, dass die Geraden EF und GH parallel sind.

1. Beweis: Wir verwenden mehrfach folgenden Satz von der Mittelparallele im Dreieck, ohne ihn jeweils zu zitieren (man könnte jeweils auch mit dem Strahlensatz argumentieren):



HS: Eine Gerade durch den Mittelpunkt einer Dreiecksseite enthält genau dann den Mittelpunkt einer zweiten Seite, wenn sie parallel zur dritten Seite des Dreiecks ist.

Es ist $\angle BAC = 45° = \angle GAH$, also auch $\angle BAG = \angle CAH$. Nach Umfangswinkelsatz haben damit die Sehnen BG und CH gleiche Länge, liegen also symmetrisch bezüglich des Durchmessers durch ihren Schnittpunkt. Also ist das Viereck $BGCH$ ein achsensymmetrisches Trapez. Insbesondere schneiden sich die symmetrisch liegenden Diagonalen BC und GH auf der Symmetrieachse, d.h. auf der Mittelsenkrechten von CG.

Es gilt aber auch $\angle CAD = 45° = \angle GAH$. Mit analoger Argumentation erhalten wir, dass auch das Viereck $DHCG$ ein achsensymmetrisches Trapez ist und sich seine Diagonalen DC und GH auf der Mittelsenkrechten von HC schneiden.

Der Umkreis des Quadrates $ABCD$ ist gleichzeitig Thaleskreis über der Strecke AC, also ist $\angle CGA = 90°$ und die Mittelsenkrechte der Strecke CG parallel zur Strecke AG. Diese Mittelsenkrechte ist also Mittelparallele im Dreieck CGA. Weil der Punkt E auf der Strecke AG liegt, ist sie darüber hinaus aber auch Mittelparallele im Dreieck CGE, insbesondere halbiert sie die Strecke CE. Mit analoger Argumentation schließen wir, dass die Mittelsenkrechte von HC die Strecke FC halbiert.

Nach oben Gesagtem sind diese Halbierungspunkte aber auch Punkte der Strecke HG. Also enthält die Strecke HG die Mittelpunkte der Seiten EC und FC im Dreieck FCE, ist also Mittelparallele zur Seite FE.

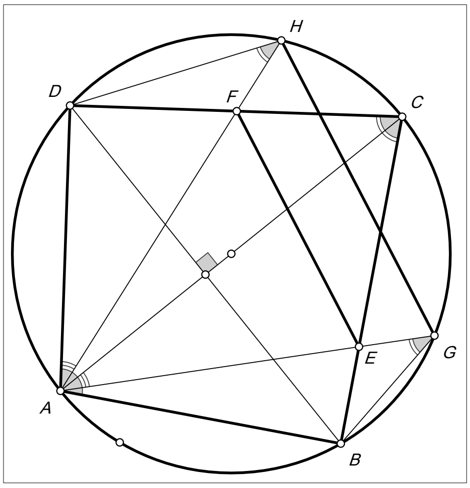
2. Beweis: Mit M sei der Mittelpunkt des Umkreises des Quadrates $ABCD$ bezeichnet, mit h_H und h_G die die Länge der Höhen von H bzw. G in den Dreiecken DCH bzw. CBG.

Es ist $\angle GAH = 45°$, also ist nach Umfangswinkelsatz $\angle GMH = 2 \cdot 45° = 90°$. Aber es ist auch $\angle BMC = \angle CMD = 90°$, also führt die Drehung um M um 90° gegen den UZS das Dreieck BGC in das Dreieck CHD über. Die Dreiecke sind also kongruent, insbesondere sind h_H und h_G gleich lang. Da auch die Quadratseiten alle gleiche Länge haben, gilt

$$\frac{\overline{HF}}{\overline{FA}} = \frac{h_H}{\overline{AD}} = \frac{h_G}{\overline{AB}} = \frac{\overline{GE}}{\overline{EA}},$$

und da F zwischen A und H liegt und auch E zwischen A und G, folgt mit Strahlensatz, dass $FE \parallel HG$.

3. Beweis: Über die Aufgabenstellung hinaus zeigen wir, dass die Aussage auch für jedes Drachenviereck $ABCD$ mit rechten Winkeln bei B und D gilt, d.h. bei einem Sehnenviereck $ABCD$, bei dem die Ecken B und D symmetrisch bzgl. der Diagonalen AC liegen, bei dem der Mittelpunkt des Umkreises auf der Diagonalen AC liegt, wenn zusätzlich verlangt wird, dass $\angle EAF = {}^1/_2\angle BAD$. Die Aufgabenstellung ist dann für den Spezialfall $\angle BAD = 90°$ gezeigt.



Nach Voraussetzung gilt ${}^1/_2\angle BAD = \angle BAC = \angle GAH$, also auch $\angle BAG = \angle CAH = \angle CAF$. Weiter ist nach Umfangswinkelsatz $\angle AGB = \angle ACB = \angle ACD = \angle ACF$. Damit haben die Dreiecke ABG und AFC gleiche Innenwinkel, sind also ähnlich und es gilt $\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AG}}$.

Nach analoger Argumentation sind auch die Dreiecke ADH und AEC ähnlich, also gilt $\frac{\overline{AD}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$

Multiplikation der linken Seiten und der rechten Seiten ergibt $\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$ was sich wegen $\overline{AD} = \overline{AB}$ kürzt zu $\frac{\overline{AF}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AG}}$. Mit Umkehrung des Strahlensatzes folgt sofort $EF \parallel GH$.

4. Beweis: Wir gehen von der abgeschwächten Voraussetzung wie im 3. Beweis aus. O.B.d.A. sei $\overline{AB} = 1$, nach Voraussetzung also auch $\overline{AD} = 1$. Weiter sei $\varphi := \angle BAE$ und $\alpha := \angle BAC$. Mit der Voraussetzung folgt $\angle BAC = \angle GAH = \angle CAD = \alpha$ und hieraus sofort $\angle BAG = \angle CAH = \varphi$ und $\angle GAC = \angle FAD = \alpha - \varphi$. Ferner ist der Umkreis des Vierecks $ABCD$ auch Thaleskreis über der Strecke AC, also sind die Dreiecke AGC und AHC rechtwinklig bei G bzw. H.

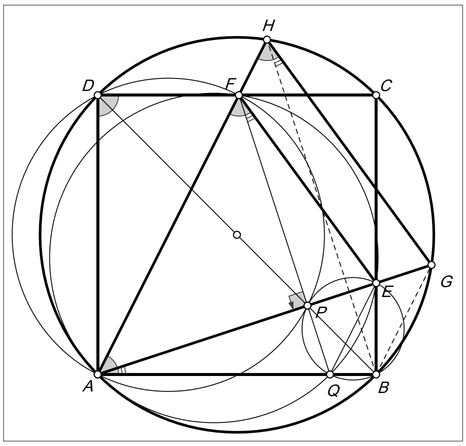
Nun können wir berechnen:

$$\overline{AG} = \cos(\alpha - \varphi) \cdot \overline{AC} \qquad \overline{AH} = \cos(\varphi) \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{AE} = \frac{1}{\cos(\varphi)} \qquad \overline{AF} = \frac{1}{\cos(\alpha - \varphi)}$$

Hieraus folgt $\frac{\overline{AG}}{\overline{AE}} = \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha - \varphi) \cdot \overline{AC} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AF}}$ und hieraus mit Strahlensatz, dass $GH \parallel EF$.

5. Beweis (über vier Sehnenvierecke): Sei P der Fußpunkt des Lotes von F auf AE und Q der Schnittpunkt von FP mit AB. Die Vierecke $APFD$ und $BEPQ$ haben beide an zwei gegenüber liegenden Ecken 90° Innenwinkel, sind also beide Sehnenvierecke, ebenso wie nach Voraussetzung das Viereck $ABCD$. Im Sehnenviereck $APFD$ ist



$$45° = \angle PAF = \angle PDF = \angle BDF,$$

also liegt P auf der Geraden BD. Hieraus schließen wir, dass

$\angle AFQ = \angle AFP = \angle ADP = 45° = \angle PBQ = \angle PEQ = \angle AEQ,$

d.h. dass auch $AQEF$ ein Sehnenviereck ist.

Ein Tanz in diesen vier Sehnenvierecken ergibt:

$$\begin{aligned}\angle AFE &= \angle AFP + \angle QFE = \angle ADP + \angle QAE \\ &= \angle ADB + \angle BAG = \angle AHB + \angle BHG \\ &= \angle AHG,\end{aligned}$$

also sind diese beiden Stufenwinkel gleich, es folgt $FE \parallel HG$.

6. Beweis (trigonometrisch /Koordinatenrechnung): Wir werden zeigen, dass eine zentrische Streckung vom Punkt A mit dem Streckfaktor $\frac{1+\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$ sowohl den Punkt E nach G als auch den Punkt F nach H abbildet. Dann sind die Geraden EF und GH parallel.

Hierzu legen wir ein Koordinatensystem so auf die Figur, dass der Ursprung auf den Punkt A zu liegen kommt, die Achsen und Einheiten wählen wir so, dass B die Koordinaten (1|0) und D die Koordinaten D(0|1) hat.

Sei $\alpha := \angle BAE$, dann hat E die Koordinaten $E(1|\tan(\alpha))$ mit $0° < \alpha < 45°$, die Gerade AE hat die Gleichung $y = x \cdot \tan(\alpha)$. Der Umkreis des Quadrates hat den Mittelpunkt $(1/2\,|\,1/2)$ und enthält den Punkt (0|0), hat also die Gleichung $(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 = 1/2$.

Der Punkt G ist Schnittpunkt dieser beiden Linien, also gilt

$(x_G - 1/2)^2 + (x_G \cdot \tan(\alpha) - 1/2)^2 = 1/2$, was wir äquivalent umformen zu

$x_G^2 \cdot (1 + \tan^2(\alpha)) = x_G \cdot (1 + \tan(\alpha))$. Die erste Lösung $x_G = 0$ scheidet aus (bzw. ergibt die x–Koordinaten des zweiten Schnittpunkts A), sodass wir $x_G = \frac{1+\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} = x_E \cdot \frac{1+\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$ erhalten,

d.h. G ist tatsächlich das Bild von E bei der angegebenen Streckung.

Die Gerade AF hat die Gleichung $y = x \cdot \tan(45°+\alpha)$ mit $45° < 45° + \alpha < 90°$. Dies formen wir mit $\tan(45°) = 1$ und einem Additionstheorem um zu

$$y = x \cdot \tan(45° + \alpha) = x \cdot \frac{\tan(45°)+\tan(\alpha)}{1-\tan(45°)\cdot\tan(\alpha)} = x \cdot \frac{1+\tan(\alpha)}{1-\tan(\alpha)} \quad \text{oder} \quad x = y \cdot \frac{1-\tan(\alpha)}{1+\tan(\alpha)}.$$

Zur Berechnung der y – Koordinate von H setzen wir dies in die Kreisgleichung ein und erhalten

$$\left(y_H \cdot \frac{1-\tan(\alpha)}{1+\tan(\alpha)} - 1/2\right)^2 + (y_H - 1/2)^2 = 1/2,$$

und hieraus zusammen mit $y_F = 1$:

$$y_H = \frac{1+\frac{1-\tan(\alpha)}{1+\tan(\alpha)}}{1+\frac{(1-\tan(\alpha))^2}{(1+\tan(\alpha))^2}} = \frac{\frac{1+\tan(\alpha)+1-\tan(\alpha)}{1+\tan(\alpha)}}{\frac{(1+\tan(\alpha))^2+(1-\tan(\alpha))^2}{(1+\tan(\alpha))^2}} = \frac{2(1+\tan(\alpha))}{2+2\tan^2(\alpha)} = y_F \cdot \frac{1+\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)},$$

also den gleichen Streckfaktor. Dies war zu zeigen.

Aufgabe 4: In der Dezimaldarstellung von $\sqrt{2} = 1{,}4142...$ findet Isabelle eine Folge von k aufeinander folgenden Nullen, dabei ist k eine positive ganze Zahl.

Beweise: Die erste Null dieser Folge steht frühestens an der k–ten Stelle nach dem Komma.

Bemerkung: Mir ist nicht bekannt, ob es in der Dezimalentwicklung der Zahl $\sqrt{2}$ beliebig lange Folgen von Ziffern 0 gibt. Es könnte also sein, dass hier Theorie der leeren Menge betrieben wird.

1. Beweis: Isabelle finde die erste Null in der Folge von k aufeinander folgenden Nullen an der r–ten Stelle nach dem Komma, d.h. es ist $\sqrt{2} = 1{,}\underbrace{4142.....x}_{r-1\text{ Stellen}}\underbrace{000....000}_{k\text{ Stellen}}y.....$, dabei stehe an der $(r-1)$–ten Stelle nach dem Komma die Ziffer $x \neq 0$, danach folgen k Ziffern 0 und dann eine Ziffer $y \neq 0$. Die Zahl $1{,}\underbrace{4142.....x}_{r-1\text{ Stellen}}\underbrace{000....000}_{k\text{ Stellen}}y.....$ ist wohldefiniert, da bekanntlich $1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}41422$ und somit $r-1 \geq 5$.

Es ist zu zeigen, dass $r \geq k$. Aus obiger Darstellung schließen wir, dass

$$1{,}\underbrace{4142.....x}_{r-1\text{ Stellen}}\underbrace{000....000}_{k\text{ Stellen}} < \sqrt{2} = 1{,}\underbrace{4142.....x}_{r-1\text{ Stellen}}\underbrace{000....000}_{k\text{ Stellen}}y..... \leq 1{,}\underbrace{4142.....x}_{r-1\text{ Stellen}}\underbrace{000....00}_{k-1\text{ Stellen}}1$$

Wir bemerken noch, dass das "≤"–Zeichen durch "<" ersetzt werden kann, weil $\sqrt{2}$ irrational ist und somit die Ziffer y und die folgenden Ziffern nicht alle 9 sein können. Wir multiplizieren die Zahlen in der Ungleichungskette mit 10^{r-1}, d.h. wir verschieben das Komma um $r-1$ Stellen nach rechts, also zwischen die Ziffer x und die erste Ziffer 0 der Folge von k Ziffern 0. Die so entstandene Zahl auf der linken Seite bezeichnen wir mit a. Für a gilt:

$$a := \underbrace{14142.....x}_{r\text{ Stellen}} \text{ ist eine ganze Zahl} \qquad (*),$$

$$a^2 < 10^{2(r-1)} \cdot 2 \qquad (**),$$

$$a < 1{,}42 \cdot 10^{r-1} \qquad (***).$$

In der Mitte der Ungleichung steht nach Multiplikation mit 10^{r-1} die Zahl $\underbrace{14142.....x}_{r\text{ Stellen}},\underbrace{000....000}_{k\text{ Stellen}}y.....$.

Ihr Nachkommateil sei d, es gilt damit

$$d := 0{,}\underbrace{000....000}_{k\text{ Stellen}}y..... < 0{,}\underbrace{000....00}_{k-1\text{ Stellen}}1 = 10^{-k}.$$

Weiter gilt

$$10^{r-1}\cdot\sqrt{2} = \underbrace{14142.....x}_{r\text{ Stellen}} + 0{,}\underbrace{000....000}_{k\text{ Stellen}}y..... = a + d, \text{ hieraus folgt nach Quadrieren}$$

$$10^{2(r-1)} \cdot 2 - a^2 = 2ad + d^2.$$

Links steht wegen (*) und (**) eine positive ganze Zahl, für die Zahl auf der rechten Seite gilt also

$$1 \leq 2ad + d^2 < 2 \cdot 1{,}42 \cdot 10^{r-1} \cdot 10^{-k} + 10^{-2k} < 2{,}84 \cdot 10^{(r-1)-k} + 10^{-2k};$$

und da $k \geq 1$, kann dies nur gelten, wenn $(r-1)-k \geq 0$, d.h. wenn $r \geq k+1$.

Damit haben wir sogar mehr als verlangt gezeigt, nämlich, dass die erste Null dieser Folge frühestens an der $(k+1)$–ten Stelle nach dem Komma stehen kann.

2. Beweis (mit kleiner Lücke, durch Widerspruch): Im Folgenden verkürzen wir die Formulierung "die k–te Ziffer in der Dezimaldarstellung der Zahl" zu "die k–te Ziffer der Zahl".

Zunächst stellen wir fest, dass $2{,}\overline{0}$ und $1{,}\overline{9}$ die einzigen Dezimaldarstellungen der Zahl 2 sind. Eine Zahl, die mindestens eine Nachkommastelle (abgekürzt NKS) verschieden von 0 und eine andere verschieden von 9 hat, kann also nicht die Zahl 2 sein. Weiter stellen wir fest, dass die ersten 6 NKS von $\sqrt{2}$ keine Ziffer 0 enthalten.

Wir nehmen an, dass Isabelle folgende Darstellung gefunden hat:

$$\sqrt{2} = 1,\underbrace{4142.....x}_{r-1\text{ Stellen}}\underbrace{000...000}_{k\text{ Stellen}}y..... \text{ mit } r \geq 7, x \neq 0, y \neq 0;$$

Zu zeigen ist, dass $k > r$ zum Widerspruch führt.

Die rechte Seite schreiben wir in der Form $(1 + 0,\underbrace{4142.....x}_{r-1\text{ Stellen}} + 0,\underbrace{0000..0000....000}_{r-1+k\text{ Stellen}}y.....)$; Quadrieren der beiden Seiten ergibt

$$2 = 1^2 + 2\cdot 1\cdot 0,\underbrace{4142.....x}_{r-1\text{ Stellen}} + (0,\underbrace{4142.....x}_{r-1\text{ Stellen}})^2$$

$$+ 2\cdot 1,\underbrace{4142.....x}_{r-1\text{ Stellen}}\cdot 0,\underbrace{00.....00}_{r-1+k\text{ Stellen}}y.....+(0,\underbrace{00.....00}_{r-1+k\text{ Stellen}}y.....)^2 .$$

Wir untersuchen die Ziffer an der $(r - 1 + k)$–ten NKS und der folgenden NKS dieser Zahl: Sei S_1 die Summe der ersten drei Summanden, also der ersten Zeile. Die $(2r–2)$–te NKS ist die Endziffer von x^2, und da $x \neq 0$, ist diese von 0 verschieden, alle Ziffern rechts davon sind 0.

Sei S_2 die Summe der Zahlen in der zweiten Zeile: Die Zahl $2\cdot 1,\underbrace{4142.....x}_{r-1\text{ Stellen}}\cdot 0,\underbrace{00.....00}_{r-1+k\text{ Stellen}}y.....$ hat frühestens an der $(r - 1 + k)$–ten NKS eine Ziffer verschieden von 0, nämlich wenn $2\cdot 1,4142...x\cdot y \geq 1$, sonst an der $(r + k)$–ten NKS. Die Zahl $(0,\underbrace{00.....00}_{r-1+k\text{ Stellen}}y.....)^2$ hat frühestens an der $(2[(r - 1 + k)] - 1)$–ten NKS eine Ziffer verschieden von 0. Also hat S_2 frühestens an der $(r - 1 + k)$–ten NKS eine Ziffer verschieden von 0.

Wäre nun $k > r$, so wäre dies frühestens die $(2r)$–te Stelle. In der Gesamtsumme $S_1 + S_2$ aus erster und zweiter Zeile kann kein Übertrag auf die $(2r - 1)$–te Stelle stattfinden, d.h. an dieser Stelle steht eine Null. Das war zu zeigen.

Bemerkungen: Im letzten Absatz können wir schärfer schließen: Wäre nun $k + 1 > r$, so stünde die erste von Null verschiedene Ziffer in S_2

– entweder an $(r - 1 + r)$–ter NKS, also an $(2r - 1)$–ter NKS, nämlich dann, wenn bei $2\cdot 1,\underbrace{4142.....x}_{r-1\text{ Stellen}}\cdot 0,\underbrace{00.....00}_{r-1+k\text{ Stellen}}y.....$ ein Übertrag stattfindet, d.h., wenn $2\cdot 1,4142...\cdot y \geq 10$, diese Ziffer wäre aber dann sicher kleiner als 3, insbesondere von 9 verschieden, und da sie und ihr Vorgänger bei der Addition auf Ziffern 0 von S_1 trifft, bleibt sie in der Summe erhalten. Dann stehen nebeneinander die von 0 verschiedene Endziffer von x^2 und die eben konstruierte, von 9 verschiedene Ziffer;

– oder an $(r - 1 + (r + 1))$–ter, also an $(2r)$–ter NKS, nämlich wenn $2\cdot 1,4142...\cdot y < 1$. Dann stehen nebeneinander die von 0 verschiedene Endziffer von x^2, und eine Ziffer 0, diese ist verschieden von 9.

So haben wir über die Aufgabenstellung hinaus gezeigt, dass die erste Null dieser Folge sogar frühestens an der $(k + 1)$ – ten NKS stehen kann.

Die oben erwähnte kleine Lücke besteht darin, dass hier Additions- und Multiplikationsalgorithmen, die richtig für Zahlen mit endlicher Dezimaldarstellung sind, bei Zahlen mit unendlicher Dezimaldarstellung verwendet werden, ohne im Einzelnen nachzuweisen, dass dies problemlos zu richtigen Ergebnissen führt. Hier hätte eine Abschätzung durch Zahlen mit endlicher Dezimaldarstellung erfolgen müssen.