MO-Tage

Serie 1 – Lösungen

Klassenstufe 3

Es gibt folgende sechs Möglichkeiten:

135	315	513
153	351	531

Klassenstufe 4

a) Jan kann sich vier verschiedene Eisbecher aussuchen.

   Erdbeer, Schokolade, Nuss

   Erdbeer, Schokolade, Vanille

   Erdbeer, Nuss, Vanille

   Schokolade, Nuss, Vanille

b) Zu den bereits gefundenen Lösungen kommen noch 3 weitere Möglichkeiten hinzu.

   $2 \times$ Erdbeer, $1 \times$ Schokolade

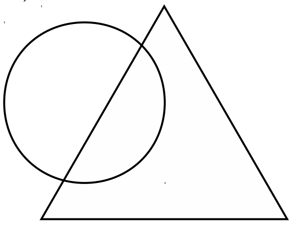
   $2 \times$ Erdbeer, $1 \times$ Nuss

   $2 \times$ Erdbeer, $1 \times$ Vanille

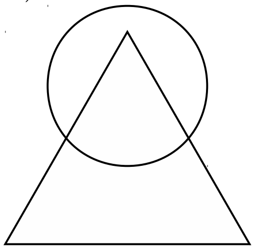
Klassenstufe 5

Die Abbildungen sind jeweils Beispiele für die in a) – e) geforderten Anordnungen:

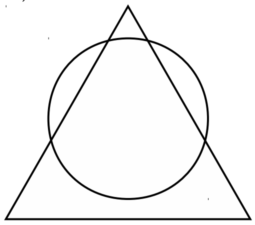
a)



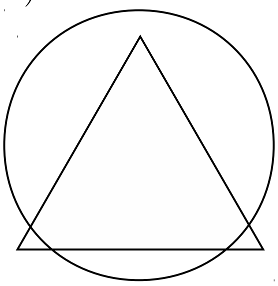
b)



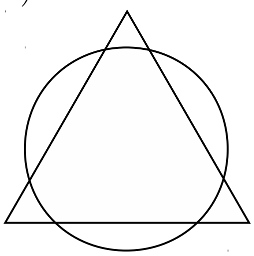
c)



d)



e)



Klassenstufe 6

Teil a) Die natürlichen Zahlen 3, 8, 4, 11 bilden eine vollständige gemeinsame Linie. Ihre Summe beträgt $(3 + 8 + 4 + 11 =)$ 26.

Diese Summe muss sich jeweils auch für die verbleibenden Linien ergeben. Deswegen folgt für D die Zahl $[26-(1+5+11) =]$ 9 und für C die Zahl $[26-(9+12+3) =]$ 2.

Es müssen noch die Zahlen für die Buchstaben A, B und E zugeordnet werden. Es gelten folgende Beziehungen:

(1) $A + 2 + 8 + B = 26$, also $A + B = 16$;
(2) $A + 12 + 1 + E = 26$, also $A + E = 13$;
(3) $B + 4 + 5 + E = 26$, also $B + E = 17$.

Aus (1) und (2) folgt

(4) $B = E + 3$.

Aus (4) und (3) folgt $(E + 3) + E = 17$ und schließlich $E = 7$ sowie hieraus mit (3) $B = 10$.

Hieraus und mit (1) folgt dann $A = 6$.

Probe: $6 + 2 + 8 + 10 = 9 + 1 + 5 + 11 = 9 + 12 + 2 + 3 = 7 + 5 + 4 + 10 = 7 + 1 + 12 + 6 = 11 + 4 + 8 + 3 = 26$.

Hinweis: Auch eine Lösung, die durch Probieren gefunden und deren Richtigkeit durch die Probe nachgewiesen wurde, ist als vollständig anzuerkennen.

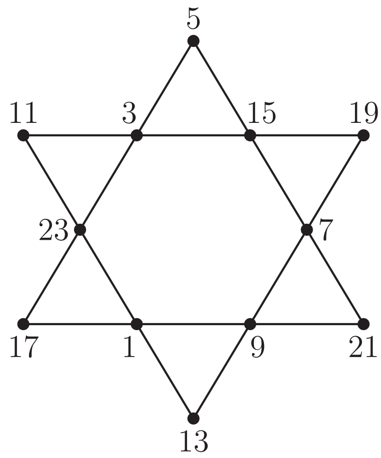
Teil b)

Nutzbare Überlegungen zum Finden einer Lösung sind:

(1) Die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis 23 ist 144.

(2) Jede Zahl kommt in der Summe von zwei Linien vor. Bildet man demnach die Summe aller sechs gleichen Liniensummen, so muss man $(2 \cdot 144 =)$ 288 erhalten.

(3) Demnach muss die Summe auf einer Linie $(288 : 6 =)$ 48 sein.



Man erhält die angegebene Lösung in diesem Fall auch, indem die Zahlen 1 bis 12 aus Teil a) in genau dieser Reihenfolge durch die ungeraden Zahlen 1 bis 23 ersetzt werden.

Klassenstufe 7

In eineinhalb Tagen würden drei Hühner doppelt so viele Eier wie eineinhalb Hühner, also drei Eier legen. Ein Huhn würde in dieser Zeit den dritten Teil, das ist ein Ei, legen. Also würden sieben Hühner in eineinhalb Tagen sieben Eier legen.

Da sechs Tage viermal soviel sind wie eineinhalb Tage, würden folglich die sieben Hühner in sechs Tagen genau 28 Eier legen.

Klassenstufe 8

Da die Laufstrecke eine Länge von 800 m hat, muss Bernd bei einer Vorgabe von 30 m noch 770 m laufen. Mit t_1 bezeichnen wir die Zeit, die Bernd für diese Strecke benötigt. Für seine Geschwindigkeit v_B gilt dann

$$v_B = \frac{770\,\mathrm{m}}{t_1}\,. \tag{1}$$

Bei einer Vorgabe von 50 m muss Bernd noch 750 m laufen. Mit t_2 bezeichnen wir die Zeit, die Bernd für diese Strecke benötigt. Für seine Geschwindigkeit v_B gilt dann auch

$$v_B = \frac{750\,\mathrm{m}}{t_2}\,, \tag{2}$$

da Bernd beide Male gleich schnell läuft. Aus (1) und (2) folgt

$$t_1 = \frac{77}{75} \cdot t_2 \,. \tag{3}$$

Nach Aufgabenstellung sind $t_1 - 2\,\mathrm{s}$ und $t_2 + 1{,}2\,\mathrm{s}$ die Zeiten, die Anton für die Strecke von $800\,\mathrm{m}$ benötigt. Da Anton beide Male gleich schnell läuft, gilt

$$t_1 - 2\,\mathrm{s} = t_2 + 1{,}2\,\mathrm{s}$$

und daher

$$t_1 = t_2 + 3{,}2\,\mathrm{s} \,. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt $\frac{77}{75} \cdot t_2 = t_2 + 3{,}2\,\mathrm{s}$, $\frac{2}{75} \cdot t_2 = 3{,}2\,\mathrm{s}$, $t_2 = \frac{75}{2} \cdot 3{,}2\,\mathrm{s}$ und schließlich

$$t_2 = 120\,\mathrm{s} \,.$$

Hieraus und aus (2) folgt

$$v_B = \frac{750\,\mathrm{m}}{120\,\mathrm{s}} = 6{,}25\,\mathrm{m/s} \,.$$

Wegen $t_2 + 1{,}2\,\mathrm{s} = 121{,}2\,\mathrm{s}$ gilt für die Geschwindigkeit v_A von Anton

$$v_A = \frac{800\,\mathrm{m}}{121{,}2\,\mathrm{s}} \approx 6{,}60\,\mathrm{m/s} \,.$$

Die Geschwindigkeit von Anton beträgt etwa $6{,}60\,\mathrm{m/s}$, die Geschwindigkeit von Bernd beträgt $6{,}25\,\mathrm{m/s}$.

Klassenstufe 9

Teil a) Bernd hat zwei Möglichkeiten, den Viererstapel zu zerlegen: erstens in einen Einer- und einen Dreierstapel und zweitens in zwei Zweierstapel.

Im ersten Fall muss Inge den Einerstapel entfernen und den Dreierstapel in einen Einer- und einen Zweierstapel zerlegen. Bernd gewinnt nun, indem er den Einerstapel entfernt und den Zweierstapel zerlegt. Inge kann bei zwei Einerstapeln keinen gültigen Zug mehr ausführen.

Im zweiten Fall gewinnt Inge. Sie entfernt einen der Zweierstapel und zerlegt den zweiten in zwei Einerstapel. Bernd kann dann keinen gültigen Zug mehr ausführen.

Teil b) Hat der Stapel eine ungerade Größe, so kann Inge den Sieg erzwingen, ansonsten gewinnt Bernd (bei einer geraden Größe des Stapels).

Beweis: Haben die zwei Stapel auf dem Tisch beide eine ungerade Größe (mindestens eine größer als eins), so entsteht im nächsten Zug ein Stapel gerader Größe, der im übernächsten Zug (immer möglich) wieder in zwei Stapel ungerader Größe zerlegt werden kann.

Die Gewinnstrategie ist für beide gleich und besteht bei vorliegenden Stapeln unterschiedlicher Parität darin, den Stapel ungerader Größe zu entfernen und den Stapel gerader Größe in zwei Stapel ungerader Größe zu zerlegen.

Bei jedem Zug werden die Stapel kleiner, daher endet das Spiel nach endlich vielen Zügen. Da jemand, der die Gewinnstrategie kennt und spielen kann (er findet einen geraden und einen ungeraden Stapel vor), stets einen geraden Stapel vorfindet und jemand, der sie nicht spielen kann (er findet zwei ungerade Stapel vor), stets einen geraden Stapel erzeugt, endet das Spiel mit zwei Stapeln aus nur einer Karte mit Bernd am Zug, wenn der Ausgangsstapel ungerade war, und Inge am Zug, wenn er gerade war.

Klassenstufe 10

Martins Reisekosten in Euro bezeichnen wir mit m, die überwiesene Summe mit s.

Kurzfassung: Unterschieden sich s und m nur durch einen Zahlendreher, so hätten beide Zahlen die gleiche Quersumme. Da eine Zahl bei Division durch 9 denselben Rest lässt wie ihre Quersumme, müssten s und m also denselben Rest bei Division durch 9 lassen, die Differenz $m - s = 26$ müsste also durch 9 teilbar sein. Das ist nicht der Fall.

Ausführlich: Die zwei Ziffern, die Herr Geizig angeblich vertauscht hat, seien a und b, wobei a an der $(n+1)$-ten Stelle und b an der $(k+1)$-ten Stelle der Zahl m steht, jeweils von der Einerstelle aus gezählt. Dabei gelte $n > k \geq 0$. Da m und s in allen anderen Stellen übereinstimmen, erhält man für deren Differenz

$$\begin{aligned} m - s &= 10^n \cdot (a-b) + 10^k \cdot (b-a) \\ &= 10^n \cdot (a-b) - 10^k \cdot (a-b) \\ &= (a-b) \cdot 10^k \cdot (10^{n-k} - 1)\,. \end{aligned}$$

Diese Differenz ist durch 9 teilbar, da die Zahl $z = 10^{n-k} - 1$ durch 9 teilbar ist (alle Ziffern von z sind Neunen, da $n - k \geq 1$ gilt). Mit z ist auch $m - s$ durch 9 teilbar. Die Zahl 26 ist aber nicht durch 9 teilbar. Es kann sich also keine Differenz von 26 € ergeben.

Klassenstufen 11–13

Angenommen, (a, b, c) ist ein Lösungstripel des gegebenen Systems. Wegen (1) ist dann $b \neq 0$. Somit müssen wegen (1) und (2) die Gleichungen $a = \frac{20}{b}$ und $c = \frac{12}{b}$ gelten.

Werden beide in (3) eingesetzt, so ergibt sich

$$\frac{20}{b} + b + \frac{12}{b} = 12$$

und damit die quadratische Gleichung

$$b^2 - 12b + 32 = 0$$

mit den Lösungen

$$b_{1,2} = 6 \pm \sqrt{36 - 32} = 6 \pm 2\,.$$

Zu $b = 4$ ergeben sich $a = 5$ und $c = 3$. Die Möglichkeit $b = 8$ liefert $a = \frac{5}{2}$ und $c = \frac{3}{2}$. Es kommen als Lösungen folglich nur die Tripel $(5, 4, 3)$ und $\left(\frac{5}{2}, 8, \frac{3}{2}\right)$ in Frage.

Durch Einsetzen in (1)–(3) sieht man sofort, dass diese beiden Tripel tatsächlich Lösungen des gegebenen Gleichungssystems sind.

Lösungsvariante: Auf die Feststellung von $b \neq 0$ kann verzichtet werden, wenn im ersten Umwandlungsschritt Gleichung (3) mit b multipliziert wird. Dies liefert die Gleichung

$$ab + b^2 + bc = 12b\,.$$

Einsetzen von (1) und (2) ergibt nun ebenfalls die quadratische Gleichung

$$b^2 - 12b + 32 = 0\,.$$

Die weitere Argumentation ist identisch zu der oben angegebenen.