BUNDESWEITE MATHEMATIK-WETTBEWERBE
Bildung & Begabung

MO-Tage

Die neuen MO-Tage sind MO-ntag und MO-nnerstag.

Liebe Schülerinnen und Schüler,

die aktuelle Corona-Krise beschäftigt auch uns Mathe-Fans. Damit ihr während dieser schweren Zeit nicht auf mathematische Herausforderungen verzichten müsst, haben wir, der Verein Mathematik-Olympiaden e.V. und das Talentförderzentrum Bildung & Begabung, die MO-Tage ins Leben gerufen.
Ab sofort veröffentlichen wir zweimal pro Woche ein Aufgabenblatt mit kniffligen Aufgaben aus den Mathematik-Olympiaden der vergangenen Jahre – jeden MO-ntag und MO-nnerstag. Pro Klassenstufe gibt es eine Aufgabe, sodass jede und jeder die eigene Schwierigkeitsstufe für sich selbst wählen kann. Zusätzlich zu dem Aufgabenblatt veröffentlichen wir außerdem ein Lösungsblatt zum letzten Aufgabenblatt.
Viel Spaß!

Serie 10 – Aufgaben

Die Lösungen werden am 30.04.2020 veröffentlicht.

Klassenstufe 3

Fußball-Stadtmeisterschaft
Endspiel
Schule am Sommerberg – Winterberg-Grundschule
Beginn: 15:30 Uhr
Ort: Waldsportplatz
Gespielt wird zweimal 20 Minuten mit 10 Minuten Pause

Trage die fehlenden Zeiten in die Tabelle ein!

Spielbericht:

Spielbeginn 7 Minuten später	________Uhr
13. Spielminute 1:0 für die Schule am Sommerberg	________Uhr
2 Minuten später Kopfball der Winterberger knapp am Tor vorbei	________Uhr
3 Minuten vor der Halbzeitpause Ausgleichstor für die Winterberger	________Uhr
10 Minuten Pause pünktlich nach 20 Minuten Spielzeit	________Uhr
Beginn der 2. Halbzeit, Anpfiff ______ Minuten verspätet	16:10 Uhr
Genau 60 Sekunden später 2. Tor für die Schule am Sommerberg	________Uhr
______ . Minute Torwart der Winterberg-GS verhindert 3:1-Führung	16:27 Uhr
2 Minuten vor Spielende Ausgleichstor für Winterberg	________Uhr
Spielende (Es gibt keine Nachspielzeit.)	________Uhr

Klassenstufe 4

Im Mittelalter verwendeten Menschen Kerzen mit darin eingeschlossenen Metallkugeln, um Zeitdauern zu messen. Beim Abbrennen der Kerze lösten sich die Kugeln und fielen jeweils nach Ablauf von 10 Minuten in eine Schale.

a) Wie viele Kugeln liegen in der Schale, wenn eine Stunde vergangen ist?

b) Wie viele Kugeln liegen in der Schale, wenn 35 Minuten vergangen sind?

c) In wie vielen Minuten fällt die nächste Kugel, wenn 83 Minuten vergangen sind?

d) Wie spät ist es, wenn man um 20:15 Uhr eine solche Kerze angezündet hat und das fünfte Mal eine Kugel fallen hört?

e) Um 17:32 Uhr fällt die 8. Kugel in die Schale. Wann wurde die Kerze angezündet?

f) Wann muss die Kerze angezündet werden, wenn man um 18:09 Uhr die dritte Kugel hören möchte?

Klassenstufe 5

Schnittpunkte sind immer Punkte, in denen Figuren einander schneiden und nicht nur berühren. Fertige alle Zeichnungen mit Lineal und Bleistift an und kennzeichne und nummeriere in jedem Aufgabenteil die Schnittpunkte.

a) Zeichne zwei Dreiecke so, dass sich sechs Schnittpunkte ergeben.

b) Zeichne drei Dreiecke so, dass sich zehn Schnittpunkte ergeben.

c) Zeichne drei Dreiecke so, dass die maximale Anzahl von 18 Schnittpunkten erreicht wird.

d) Wie viele Schnittpunkte können zwei Dreiecke und eine Gerade höchstens haben? Begründe!

Klassenstufe 6

An der großen Ruderregatta auf der Alster nehmen nur Vierer und Achter teil. Da sowohl die Vierer als auch die Achter jeweils mit Steuermann gefahren werden, sitzen in einem Vierer fünf Sportler und in einem Achter neun Sportler.

Jens ist für die Listenführung verantwortlich und findet heraus, dass bis zum Meldetermin 1020 Sportler gemeldet waren und dass die Anzahl der Achter 45 betrug. Jeder Sportler wurde nur für ein Boot gemeldet.

a) Berechne die Anzahl der gemeldeten Vierer.

Bei der Regatta durften auch Boote starten, die bis zum Meldetermin noch nicht gemeldet waren. Andererseits sind einige gemeldete Boote nicht erschienen. An der Regatta nahm schließlich ein Boot weniger teil als ursprünglich gemeldet. Überraschenderweise waren aber insgesamt mehr Sportler in den Booten, nämlich 1023.

b) Ermittle aufgrund dieser Zahlen, wie sich die Anzahlen der Viererboote und der Achterboote gegenüber der Meldung geändert haben.
Hinweis: Es gibt nur eine Lösung für dieses Problem.

Klassenstufe 7

Laura fährt in der Regel jeden Tag von Audorf nach Bergstadt mit dem Zug, der dazu genau eine Dreiviertelstunde braucht.

Eines Tages wurde Laura von ihrer Mutter mit dem Auto mitgenommen. Die Straße, die sie fuhren, führt an den Bahngleisen entlang. Das Auto fuhr mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 72 km/h. Sie starteten eine Viertelstunde später als der Zug und kamen 5 Minuten früher an.

a) Wie weit ist Audorf von Bergstadt entfernt?

b) Wie groß war die Durchschnittsgeschwindigkeit des Zuges?

Klassenstufe 8

Die 6 Schulfreunde Arno, Bodo, Cuno, Doro, Enno und Fero wollen in einem Kaufhaus die Rolltreppe zur nächsten Etage benutzen.

a) Ermittle die Anzahl aller Möglichkeiten, die Rolltreppe zu betreten, wenn sie sich nacheinander jeweils auf eine Stufe stellen.

b) Ermittle die Anzahl der verbleibenden Möglichkeiten für Bodo, Cuno, Doro und Enno, die Rolltreppe zu betreten, wenn Arno als erster und Fero als letzter mit der Rolltreppe fahren wollen.

c) Ermittle die Anzahl aller Möglichkeiten, die Rolltreppe zu betreten, wenn Arno, Bodo und Cuno auf drei unmittelbar aufeinander folgenden Stufen stehen wollen, aber nicht unbedingt in dieser Reihenfolge.

Klassenstufe 9

Velo Flitzeped macht eine Radtour. Zum Aufwärmen fährt er auf ebener Straße mit 20 km/h und dann mit 15 km/h bergauf, bis ihm die Puste ausgeht. Danach fährt er dieselbe Strecke zurück, bergab sehr vorsichtig mit 30 km/h und in der Ebene wieder mit 20 km/h. Insgesamt ist er 5 Stunden unterwegs.

Ermitteln Sie die Gesamtlänge der beschriebenen Radtour.

Klassenstufe 10

Zwei Folgen ganzer Zahlen (a_n) und (b_n) sind gegeben durch ihre Bildungsvorschriften

$$a_1 = p,\ a_2 = q \text{ und } a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \text{ für alle } n > 0$$

bzw.

$$b_1 = p,\ b_2 = q \text{ und } b_{n+2} = b_n - b_{n+1} \text{ für alle } n > 0\,.$$

a) Es sei $p = 1$ und $q = 4$. Geben Sie die Folgenglieder a_1 bis a_8 an.

b) Eine Zahlenfolge (x_n) heißt periodisch, wenn es eine positive ganze Zahl k so gibt, dass für jedes Folgenglied x_n die Beziehung $x_n = x_{n+k}$ gilt. Die Periodenlänge einer periodischen Folge (x_n) ist definiert als die *kleinste* positive ganze Zahl k mit der Eigenschaft, dass $x_n = x_{n+k}$ für jedes Folgenglied x_n gilt.
   Weisen Sie nach, dass die Folge (a_n) für beliebige Startwerte p und q stets periodisch ist, und ermitteln Sie alle für (a_n) möglichen Periodenlängen.

c) Ermitteln Sie alle Paare ganzer Zahlen (p, q), für die das Folgenglied b_6 den Wert 0 annimmt.

Klassenstufen 11–13

Eine ebene *Knickschlange* besteht aus einer Kette von Segmenten der Länge 1, die in ihren Endpunkten beweglich miteinander verbunden sind. Je zwei aufeinanderfolgende Segmente sind entweder parallel oder senkrecht zueinander, und alle Verbindungsstellen (zu denen auch die beiden Endpunkte der Kette gezählt werden) sollen voneinander verschieden sein.

Abbildung 1 zeigt eine Knickschlange der Länge 7.

Zirkuswärter Zizero will eine Knickschlange in einen kreisrunden Käfig vom Radius 3 so einsperren, dass sich die komplette Schlange im Innern oder auf dem Rand des Käfigs befindet und der Kopf der Schlange (ein Ende der Kette) im Mittelpunkt des Käfigs liegt.

Man bestimme die maximale Länge einer Knickschlange, die Zizero im Käfig unterbringen kann.

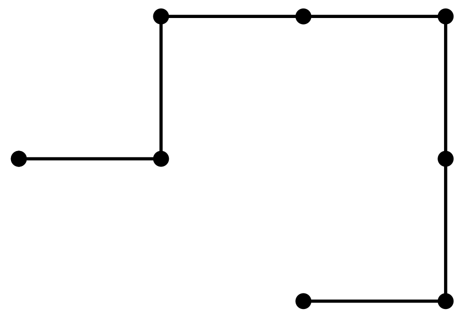

Abbildung 1