BUNDESWEITE
MATHEMATIK-WETTBEWERBE
Bildung & Begabung

MO-Tage

Serie 10 – Lösungen

Klassenstufe 3

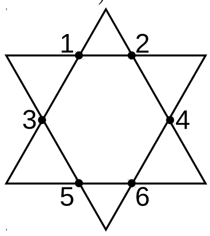
Spielbeginn 7 Minuten später	**15:37 Uhr**
13. Spielminute 1:0 für die Schule am Sommerberg	**15:50 Uhr**
2 Minuten später Kopfball der Winterberger knapp am Tor vorbei	**15:52 Uhr**
3 Minuten vor der Halbzeitpause Ausgleichstor für die Winterberger	**15:54 Uhr**
10 Minuten Pause pünktlich nach 20 Minuten Spielzeit	**15:57 Uhr**
Beginn der 2. Halbzeit, Anpfiff **3** Minuten verspätet	16:10 Uhr
Genau 60 Sekunden später 2. Tor für die Schule am Sommerberg	**16:11 Uhr**
37. Minute Torwart der Winterberg-GS verhindert 3:1-Führung	16:27 Uhr
2 Minuten vor Spielende Ausgleichstor für Winterberg	**16:28 Uhr**
Spielende (Es gibt keine Nachspielzeit.)	**16:30 Uhr**

Klassenstufe 4

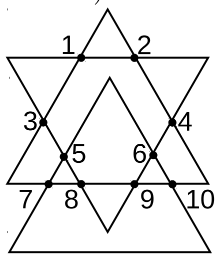
a) 6 Kugeln liegen in der Schale.
b) 3 Kugeln liegen in der Schale.
c) In sieben Minuten fällt die nächste Kugel.
d) Es ist 21:05 Uhr.
e) Um 16:12 Uhr wurde die Kerze angezündet.
f) Um 17:39 Uhr muss die Kerze angezündet werden.

Klassenstufe 5

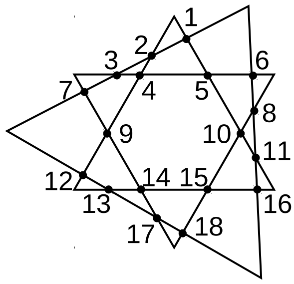
Teil a)



Teil b)



Teil c)



Teil d) Zwei Dreiecke können höchstens sechs Schnittpunkte haben, weil jede Seite eines Dreiecks höchstens zwei Seiten des anderen Dreiecks schneiden kann. Die Gerade kann jedes Dreieck höchstens in zwei Punkten schneiden.

Somit ergeben sich insgesamt maximal $(6 + 2 + 2 =)$ 10 Schnittpunkte.

Diese Zahl kann auch wirklich erreicht werden, wie das Beispiel in der Abbildung 1 zeigt.

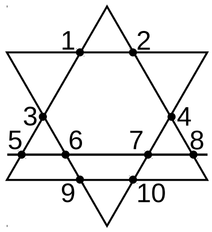


Abbildung 1

Klassenstufe 6

Teil a) In 45 Achtern sitzen $(45 \cdot 9 =)$ 405 Sportler, also gehören $(1020 - 405 =)$ 615 Sportler in die Viererboote. Da jedes dieser Boote mit fünf Sportlern fährt, wurden $(615 : 5 =)$ 123 Vierer gemeldet.

Teil b) Laut Aufgabenstellung sind ein Boot weniger und drei Sportler mehr als gemeldet am Start. Wenn man zwei Vierer durch einen Achter ersetzt, so sinkt die Bootsanzahl um 1, die Teilnehmerzahl sinkt ebenfalls um $(2 \cdot 5 - 9 =)$ 1. Wenn man aber drei Vierer durch zwei Achter ersetzt, so sinkt die Bootsanzahl wiederum um 1, die Teilnehmeranzahl aber steigt um $(2 \cdot 9 - 3 \cdot 5 =)$ 3, wie angegeben.

Klassenstufe 7

Die Fahrzeiten von Auto und Zug werden mit t_A und t_Z bezeichnet, die Durchschnittsgeschwindigkeiten entsprechend mit v_A und v_Z.

Teil a) Nach Aufgabenstellung gelten $t_\mathrm{Z} = \frac{3}{4}\,\mathrm{h}$ und $v_\mathrm{A} = 72\,\mathrm{km/h}$.
Da das Auto eine Viertelstunde später startete und 5 Minuten eher ankam, gilt

$$t_\mathrm{A} = t_\mathrm{Z} - \frac{1}{4}\,\mathrm{h} - 5\,\mathrm{min} = \frac{3}{4}\,\mathrm{h} - \frac{1}{4}\,\mathrm{h} - 5\,\mathrm{min} = \frac{6}{12}\,\mathrm{h} - \frac{1}{12}\,\mathrm{h} = \frac{5}{12}\,\mathrm{h}\,.$$

Für die Entfernung s von Audorf nach Bergstadt gilt daher

$$s = t_\mathrm{A} \cdot v_\mathrm{A} = \frac{5}{12}\,\mathrm{h} \cdot 72\,\mathrm{km/h} = 5 \cdot \frac{72}{12}\,\mathrm{km} = 5 \cdot 6\,\mathrm{km} = 30\,\mathrm{km}\,.$$

Folglich ist Audorf 30 km von Bergstadt entfernt.

Teil b) Aus $t_\mathrm{Z} = \frac{3}{4}\,\mathrm{h}$ und $s = 30\,\mathrm{km}$ folgt

$$v_\mathrm{Z} = \frac{s}{t_\mathrm{Z}} = \frac{30\,\mathrm{km}}{\frac{3}{4}\,\mathrm{h}} = 4 \cdot \frac{30}{3}\,\mathrm{km/h} = 40\,\mathrm{km/h}\,.$$

Folglich beträgt die Durchschnittsgeschwindigkeit des Zuges 40 km/h.

Klassenstufe 8

Teil a) Da es 6 Freunde sind, gibt es 6 Möglichkeiten, die erste Stufe zu betreten; für die zweite Stufe verbleiben noch 5 Möglichkeiten. Entsprechend fortfahrend, gibt es für die letzte Stufe nur noch eine Möglichkeit. Folglich gibt es

$$(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =)\ 720$$

Möglichkeiten, die Rolltreppe zu betreten, wenn die Freunde sich nacheinander auf jeweils eine Stufe stellen.

Teil b) Da bereits zwei Positionen auf der Rolltreppe besetzt sind, verbleiben noch vier freie Treppenstufen. Für die erste freie Treppenstufe gibt es nun 4, für die zweite 3 für die dritte 2 und für die vierte genau eine Möglichkeit, sie zu betreten. Folglich gibt es

$$(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =)\ 24$$

Möglichkeiten für Bodo, Cuno, Doro und Enno, die Rolltreppe zu betreten, wenn Arno als erster und Fero als letzter mit der Rolltreppe fahren wollen.

Teil c) Arno, Bodo und Cuno wollen auf drei unmittelbar aufeinander folgenden Stufen stehen. Für diese Reihenfolge gibt es $(3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 6 Möglichkeiten.

Wir fassen diese drei Freunde zu einer Gruppe zusammen. Für die Position der anderen drei Freunde gibt es vier Möglichkeiten: Keiner ist vor der Gruppe, alle sind dahinter oder einer ist vor der Gruppe, zwei sind dahinter oder zwei sind vor der Gruppe, einer ist dahinter oder alle sind vor der Gruppe, keiner ist dahinter. Für die Reihenfolge der anderen Freunde gibt es wieder jeweils $(3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 6 Möglichkeiten.

Folglich gibt es $(6 \cdot 4 \cdot 6 =)$ 144 Möglichkeiten, die Rolltreppe zu betreten, wenn Arno, Bodo und Cuno auf jeweils einer Stufe unmittelbar hintereinander stehen wollen.

Klassenstufe 9

Auf jedem Teilstück gilt für den Weg s, die Zeit t und die Geschwindigkeit v die Gleichung $v = \frac{s}{t}$. Umgestellt nach t ergibt dies $t = \frac{s}{v}$. Es seien x km die Länge der ebenen Strecke und y km die Länge der Strecke mit Steigung. Die gesuchte Gesamtlänge in Kilometern beträgt dann $l = 2\,(x + y)$. Aus der Darstellung der Gesamtzeit von 5 Stunden als Summe der Teilzeiten ergeben sich nacheinander

$$5 = \frac{x}{20} + \frac{y}{15} + \frac{y}{30} + \frac{x}{20} = \frac{2\,x}{20} + \frac{y}{15} + \frac{y}{30} = \frac{x}{10} + \frac{y}{10}\,,$$

also $x + y = 50$ und damit $l = 2\,(x + y) = 100$.

Velo Flitzeped fährt also 100 km.

Klassenstufe 10

Teil a) Durch Anwenden der Bildungsvorschrift erhalten wir nacheinander

$$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = a_2 - a_1 = 3,\ a_4 = a_3 - a_2 = -1,\ a_5 = a_4 - a_3 = -4,$$
$$a_6 = a_5 - a_4 = -3,\ a_7 = a_6 - a_5 = 1 \text{ und } a_8 = a_7 - a_6 = 4\,.$$

Teil b) Aus $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ und $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$ folgt

$$a_{n+2} = a_n - a_{n-1} - a_n = -a_{n-1}\,.$$

Damit gilt $a_{n+3} = -a_n$ und $a_{n+6} = -a_{n+3}$. Daraus ergibt sich $a_{n+6} = a_n$, womit gezeigt wurde, dass jede Folge (a_n) für beliebige Startwerte p und q stets periodisch ist. Als Periodenlänge k kommen 6 und alle Teiler von 6 (1, 2 oder 3) in Frage.

Um zu untersuchen, ob kürzere Periodenlängen als 6 auftreten können, bilden wir zunächst a_1 bis a_6 :

$$a_1 = p,\; a_2 = q,\; a_3 = q - p,\; a_4 = -p,\; a_5 = -q,\; a_6 = p - q\,.$$

Wenn $k = 1$ gilt, dann folgt $a_1 = a_2 = a_3$, also $p = q = q - p = 0$. In diesem Fall ist jedes Glied der Folge (a_n) gleich null, diese Folge hat also tatsächlich die Periodenlänge $k = 1$.

Für $k = 2$ ist $a_1 = a_3$ und $a_2 = a_4$ erforderlich. Damit muss $p = q-p$ und $q = -p$ gelten. Dies führt zu $p = q = 0$, was jedoch die Periodenlänge $k = 1$ ergibt. Die Periodenlänge 2 tritt demnach nicht auf.

Für $k = 3$ muss $a_1 = a_4$ und $a_2 = a_5$ gelten. Damit ergibt sich $p = -p$ und $q = -q$. Dies führt wieder zu $p = q = 0$ und damit ebenfalls zu $k = 1$. Die Periodenlänge 3 tritt also auch nicht auf.

Die auftretenden Periodenlängen sind $k = 1$ für $p = q = 0$ und $k = 6$ in allen anderen Fällen.

Teil c) Mit $b_1 = p$, $b_2 = q$ ergibt sich der Reihe nach aus der Bildungsvorschrift $b_{n+2} = b_n - b_{n+1}$

$$b_3 = b_1 - b_2 = p - q,\; b_4 = b_2 - b_3 = -p + 2\,q,\; b_5 = b_3 - b_4 = 2\,p - 3\,q$$
$$\text{und } b_6 = b_4 - b_5 = -3\,p + 5\,q\,.$$

Ist $b_6 = 0$, so muss $-3\,p + 5\,q = 0$ und damit $3\,p = 5\,q$ gelten. Da p und q ganze Zahlen sind, muss p durch 5 und q durch 3 teilbar sein. Folglich muss $p = 5\,x$ und $q = 3\,x$ für eine geeignete ganze Zahl x gelten. Umgekehrt ergeben diese Startwerte für jedes $x \in \mathbb{Z}$ stets $b_6 = -3 \cdot 5\,x + 5 \cdot 3\,x = 0$.

Die Lösungsmenge besteht somit aus genau allen Paaren $(p, q) = (5\,x, 3\,x)$, wobei x alle ganzen Zahlen durchläuft.

Klassenstufen 11–13

Die in Abbildung 1 gezeigte Knickschlange hat die Länge 25 und befindet sich gemäß der Aufgabenstellung in einem Käfig vom Radius 3. Im Weiteren wird bewiesen, dass keine längere Schlange im Käfig untergebracht werden kann.

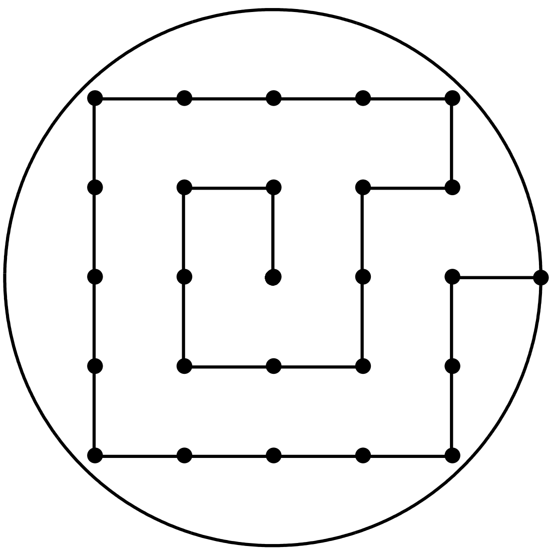


Abbildung 1

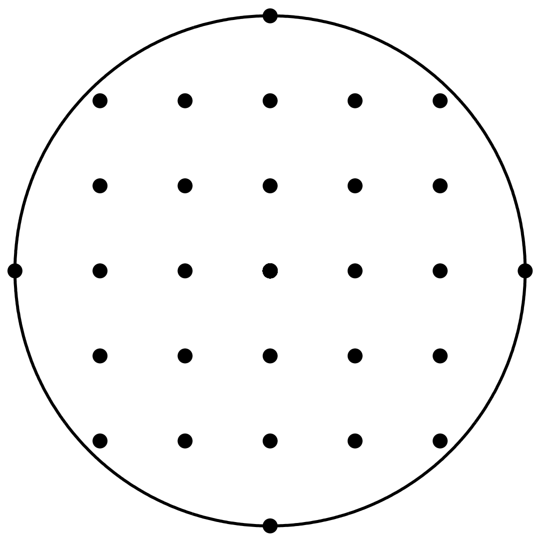


Abbildung 2

Dazu bemerken wir zunächst, dass die Richtung des ersten Segments der Schlange wegen der Rotationssymmetrie des Käfigs beliebig gewählt werden kann. Wir können deshalb annehmen, dass der Kopf der Schlange im Ursprung und das Ende des ersten Segments im Punkt $(0, 1)$ eines kartesischen Koordinatensystems liegen. Aufgrund der Knickbedingung liegen dann die Endpunkte aller Segmente in Punkten (x, y) mit ganzzahligen Koordinaten.

Durch eine einfache Rechnung mit dem Satz des Pythagoras überzeugt man sich nun leicht, dass genau die in Abbildung 2 hervorgehobenen 29 Gitterpunkte im Innern oder auf dem Rand des Käfigs liegen. Genau vier von diesen befinden sich auf dem Rand.

Die Schlange kann nun jeden der 29 Gitterpunkte höchstens einmal treffen. Von den vier Gitterpunkten auf dem Rand des Käfigs kann sie jedoch höchstens einen (mit ihrem Ende) erreichen, da jeder dieser vier Punkte nur zu einem der anderen Gitterpunkte den Abstand 1 hat und somit ein Segment, das in einem solchen Punkt endet, eine Sackgasse darstellt. Damit kann die Anzahl der von der Schlange getroffenen Gitterpunkte nicht größer als $29 - 4 + 1 = 26$ sein. Entsprechend ist die Länge der Schlange nicht größer als $26 - 1 = 25$.