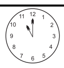
MO-Tage

Serie 11 – Lösungen

Klassenstufe 3

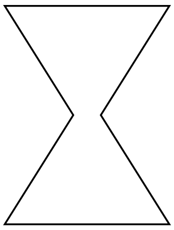
Teil a)

Monat Mai	31 Tage
	23:00 Uhr
100 Sekunden	1 Minute 40 Sekunden
12 Monate	1 Jahr
3:01 Uhr	15:01 Uhr

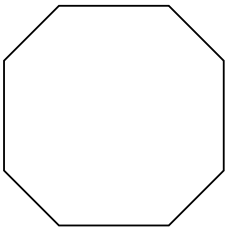
Teil b)

3 m	300 cm
75 cm	0,75 m
1 m 23 cm	123 cm

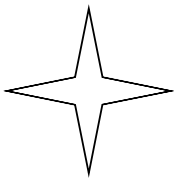
Klassenstufe 4



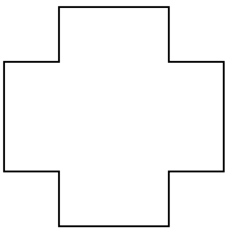
$\boxed{2}$



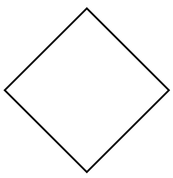
$\boxed{3}$



$\boxed{}$



$\boxed{4}$



$\boxed{1}$

Klassenstufe 5

Teil a)

	3	**7**	8	6
+	**4**	2	**5**	7
	8	0	4	**3**

Teil b)

7	**3**	**4**	·	5	3	8
	3	**6**	**7**	**0**		
		2	2	0	2	
			5	**8**	**7**	**2**
	3	**9**	**4**	**8**	**9**	**2**

Teil d)

1	**1**	1	·	**1**	2	**1**
		1	**1**	1		
			2	2	**2**	
				1	**1**	**1**
		1	**3**	4	3	1

Teil c)

	3	**1**	2
+	**7**	3	**5**
1	**0**	4	7

	3	**1**	2
+	**8**	3	**5**
1	**1**	4	7

	3	**1**	2
+	**9**	3	**5**
1	**2**	4	7

Bemerkungen zur Lösungsfindung für die einzelnen Teilaufgaben:

Teil a) Die fehlenden Ziffern können unmittelbar bestimmt werden.

Teil b) Der erste Faktor des Produkts kann mit Hilfe der zweiten Multiplikationszeile ermittelt werden, indem die zweite Multiplikationszeile durch den Zehner des zweiten Faktors dividiert wird, also $2202 : 3 = 734$.

Die erste und die dritte Multiplikationszeile wie auch die abschließende Summe kann unmittelbar berechnet werden.

Teil c) Auch hier können die fehlenden Ziffern an der Einer- und Zehnerstelle unmittelbar bestimmt werden. Jedoch sind die Ziffern der Hunderterstelle nicht eindeutig zu ermitteln. Hier gibt es drei Möglichkeiten: Die Hunderterstelle des zweiten Summanden muss, um den Zehnerübertrag zu erhalten, mindestens 7 und kann höchstens 9 sein.

Teil d) Zunächst ermittelt man den Einer der zweiten Multiplikationszeile. Dieser ergibt sich als Produkt des Zehners des zweiten Faktors mit dem Einer des ersten Faktors, also $1 \cdot 2 = 2$. Der erste Faktor lässt sich als Quotient der zweiten Multiplikationszeile mit dem Zehner des zweiten Faktors berechnen, also $222 : 2 = 111$. Nun kann mittels Differenzbildung die dritte Multiplikationszeile berechnet werden. Schließlich wird der Hunderter des zweiten Faktors ermittelt, dazu muss der Einer der ersten Multiplikationszeile durch den Einer des ersten Faktors dividiert werden, also $1 : 1 = 1$. Die fehlenden Ziffern lassen sich dann unmittelbar berechnen.

Klassenstufe 6

Teil a) Es gibt folgende Anordnungsmöglichkeiten:

$$(9+8)\cdot 7 = 119; \qquad (9+7)\cdot 8 = 128; \qquad (8+7)\cdot 9 = 135;$$
$$(9\cdot 8)+7 = \ \ 79; \qquad (9\cdot 7)+8 = \ \ 71; \qquad (8\cdot 7)+9 = \ \ 65.$$

Das größte Ergebnis erhält man folglich bei $(7+8)\cdot 9 = 135$, das kleinste bei $(7\cdot 8)+9 = 65$.

Teil b) Zwischen $(9+8)\cdot 7 = 119$ und $(7+9)\cdot 8 = 128$ lässt sich kein weiteres Ergebnis bilden.

Andererseits gilt $120 = 15\cdot 8 = (6+9)\cdot 8$; wenn also Daniel die Karte mit der 7 durch eine mit der 6 tauscht, kommt das gewünschte Ergebnis heraus.

Teil c) Wenn zuerst multipliziert und dann addiert wird, so ist das größtmögliche Ergebnis $(9\cdot 9+9=)\,90 < 111$.

Betrachten wir nun den Fall, dass zuerst addiert und dann multipliziert wird: Es gilt $111 = 1\cdot 111 = 3\cdot 37$ (als einzig mögliche Zerlegungen). Die Zahlen 111 und 37 lassen sich aber nicht als Summe zweier einstelliger Zahlen schreiben, also gibt es für das Ergebnis 111 keine Lösung.

Klassenstufe 7

I. Wenn die Länge c der Basis und die Länge a eines Schenkels eines gleichschenkligen Dreiecks die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, so gilt entweder $c = 2{,}5\cdot a$ oder $a = 2{,}5\cdot c$.

Fall 1: Aus $c = 2{,}5\cdot a$ folgt $a + a < 2{,}5\cdot a = c$ im Widerspruch zur Dreiecksungleichung. Folglich gilt $c \neq 2{,}5\cdot a$.

Fall 2: Aus $a = 2{,}5\cdot c$ folgt für den Umfang $24\,\text{cm} = u = 2{,}5\cdot c + 2{,}5\cdot c + c = 6c$, und man erhält hieraus $c = 4\,\text{cm}$ und $a = 10\,\text{cm}$.

Daher können nur $a = 10\,\text{cm}$ und $c = 4\,\text{cm}$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

II. Diese Größen erfüllen tatsächlich die gestellten Bedingungen: Wegen $10\,\text{cm} < 10\,\text{cm} + 4\,\text{cm}$ und $4\,\text{cm} < 10\,\text{cm} + 10\,\text{cm}$ erfüllen die Seitenlängen 4 cm für die Basis und 10 cm für die beiden Schenkel alle drei Dreiecksungleichungen, weswegen ein Dreieck mit diesen Seitenlängen existiert. Für den Umfang gilt $10\,\text{cm} + 10\,\text{cm} +$

$4\,\text{cm} = 24\,\text{cm}$. Wegen $10\,\text{cm} = 2{,}5 \cdot 4\,\text{cm}$ ist eine der Seiten dieses Dreiecks 2,5-mal so lang wie eine der andere Seiten.

Aus I. und II. folgt, dass das einzige gleichschenklige Dreieck, das die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt, eine Basis mit der Länge 4 cm und zwei Schenkel mit der Länge 10 cm hat.

Klassenstufe 8

I. Angenommen, es gibt ein Zahlenpaar (a, b), das die gestellten Bedingungen erfüllt. Dann gilt nach Aufgabenstellung:

(1) $a + b = 324$,
(2) $\text{ggT}\,(a, b) = 36$,
(3) $a > b$,
(4) $a \leq 2b$.

Aus Bedingung (2) und der Ganzzahligkeit von a und b folgt nach Definition des $\text{ggT}\,(a, b)$, dass es positive ganze Zahlen m und n gibt, für die die Gleichungen

$$a = 36m\,, \quad b = 36n \tag{5}$$

gelten.

Aus Bedingung (1) und Gleichung (5) folgt die Gleichung $36m+36n = 324$. Nach Division durch 36 erhält man die Gleichung

$$m + n = 9\,. \tag{6}$$

Aus (3), (4) und (5) folgt durch Einsetzen $36n < 36m \leq 72n$ und hieraus durch Umformen

$$n < m \leq 2n\,. \tag{7}$$

Aus (7) folgt durch Addition von n zunächst $2n < m + n \leq 3n$. Durch Einsetzen von (6) folgt hieraus $2n < 9 \leq 3n$. Aus $2n < 9$ folgt $n < 5$ und aus $9 \leq 3n$ folgt $3 \leq n$. Daher gilt $3 \leq n < 5$. Da n ein ganze Zahl ist, folgt hieraus, dass $n = 3$ oder $n = 4$ gilt. Hieraus und aus (6) folgt durch Einsetzen und Umformen, dass $(m, n) = (6, 3)$ oder $(m, n) = (5, 4)$ gilt. Wegen (5) und $36 \cdot 6 = 216$, $36 \cdot 3 = 108$ und $36 \cdot 5 = 180$, $36 \cdot 4 = 144$ folgt hieraus, dass $(a, b) = (216, 108)$ oder $(a, b) = (180, 144)$ gilt.

Damit ist nachgewiesen: Wenn es ein Zahlenpaar (a, b) positiver ganzer Zahlen gibt, welches die Bedingungen (1), (2), (3) und (4) erfüllt, dann kann es nur $(216, 108)$ oder $(180, 144)$ sein.

II. Wir betrachten das Zahlenpaar $(a, b) = (180, 144)$. Es ist ein Paar positiver ganzer Zahlen. Es gilt $a+b = 180+144 = 324$. Wegen $180 = 5\cdot 36$ und $144 = 4\cdot 36$ gilt $\mathrm{ggT}(a, b) = 36$. Weiter gelten $a = 180 > 144 = b$ und $a = 180 < 2b = 288$. Das Paar $(a, b) = (180, 144)$ erfüllt somit alle Bedingungen der Aufgabe.

Das Zahlenpaar $(a, b) = (216, 108)$ erfüllt hingegen die Bedingung (2) nicht, denn es gilt $\mathrm{ggT}(216, 108) = 108 \neq 36$.

Aus I. und II. folgt, dass das Zahlenpaar $(a, b) = (180, 144)$ das einzige Zahlenpaar ist, welches den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Klassenstufe 9

Die Diagonalenlängen beider Quadrate betragen nach dem Satz des Pythagoras jeweils $a\sqrt{2}$. Für die Rechteckseiten gilt dann

$$|DH| = a\sqrt{2} - a = a\,(\sqrt{2} - 1) \quad \text{und} \quad |DG| = a\sqrt{2} + a = a\,(\sqrt{2} + 1)\,.$$

Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt somit $a^2\,(\sqrt{2}-1)\,(\sqrt{2}+1) = a^2\,(\sqrt{2}^2 - 1^2) = a^2$. Rechteck und Quadrat haben den gleichen Flächeninhalt.

Klassenstufe 10

Ein Tripel (x, y, z), in welchem x, y und z ganze Zahlen sind und weiter $0 < x < y^3$ sowie $x + y^3 = z^3$ gelten, bezeichnen wir als *zulässiges Tripel.*

Da nach $y+z$ gefragt ist, versuchen wir, x zu eliminieren. Aus $0 < x$ und $x+y^3 = z^3$ folgt zunächst $y^3 < z^3$. Die Gleichung $x + y^3 = z^3$ lässt sich nach x umstellen zu $z^3 - y^3 = x$. Mit $x < y^3$ erhält man daraus $z^3 - y^3 < y^3$, also $z^3 < 2\,y^3$.

Damit muss für jedes zulässige Tripel

$$y^3 < z^3 < 2\,y^3 \tag{1}$$

gelten.

Für ganze Zahlen (y, z) mit (1) ergibt sich folgende Tabelle:

y	y^3	$2\,y^3$
1	1	2
2	8	16
3	27	54
4	64	128
5	125	250
6	216	432

Wir finden in dieser Übersicht 5^3 als die kleinste dritte Potenz, die zwischen einer kleineren dritten Potenz und deren Doppeltem liegt, denn es gilt $4^3 < 5^3 < 2 \cdot 4^3$.

Es sind also $y = 4$, $z = 5$ die kleinsten Werte, für die (1) erfüllt ist.

Zu $y = 4$, $z = 5$ berechnet sich $x = 5^3 - 4^3 = 61$. Dieses Tripel ist ein zulässiges Tripel, denn x, y und z sind ganze Zahlen, es gilt $x + y^3 = z^3$ und außerdem $0 < x = 5^3 - 4^3 < 4^3 = y^3$.

Der kleinste Wert für $y + z$ eines zulässigen Tripels ist also gleich 9 und ergibt sich für das Tripel $x = 61, y = 4, z = 5$.

Hinweis: Der zweite Teil der Argumentation ist nicht überflüssig, denn es muss auch gezeigt werden, dass das gefundene Tripel wirklich zulässig ist.

Klassenstufen 11–13

Angenommen, (a, b) erfüllt die Bedingung der Aufgabenstellung. Zunächst werden Paare mit $a \leq b$ betrachtet.

Dann gilt $ab \mid (a+1)(b+1)$, also $ab \mid (ab+a+b+1)$ und damit $ab \mid (a+b+1)$. Dies bedeutet insbesondere

$$\begin{aligned} ab &\leq a+b+1\,, \\ ab-a-b+1 &\leq 2\,, \\ (a-1)(b-1) &\leq 2\,. \end{aligned}$$

Die Annahme $a \leq b$ liefert nun $(a-1)^2 \leq (a-1)(b-1) \leq 2$ und damit $a = 1$ oder $a = 2$. Wir unterscheiden diese beiden Fälle.

Fall 1: $a = 1$.
Dann soll $b \mid 2(b+1)$ gelten, also $b \mid (2b+2)$ und damit $b \mid 2$. Es folgt $b = 1$ oder $b = 2$.

Fall 2: $a = 2$.

Dann soll $2b \mid 3(b+1)$ gelten, also insbesondere $b \mid (3b+3)$ und damit $b \mid 3$. Wegen $a \leq b$ folgt $b = 3$.

Wenn es also Paare im Sinne der Aufgabenstellung mit $a \leq b$ gibt, so kommen dafür nur $(1, 1)$, $(1, 2)$ und $(2, 3)$ in Frage.

Für $a > b$ kommen die Paare $(2, 1)$ und $(3, 2)$ hinzu.

Probe:

$(1, 1)$ ist Lösung, denn $2 \cdot 2 = 4$ ist durch $1 \cdot 1 = 1$ teilbar.

$(1, 2)$ ist Lösung, denn $2 \cdot 3 = 6$ ist durch $1 \cdot 2 = 2$ teilbar.

$(2, 1)$ ist Lösung, denn $3 \cdot 2 = 6$ ist durch $2 \cdot 1 = 2$ teilbar.

$(2, 3)$ ist Lösung, denn $3 \cdot 4 = 12$ ist durch $2 \cdot 3 = 6$ teilbar.

$(3, 2)$ ist Lösung, denn $4 \cdot 3 = 12$ ist durch $3 \cdot 2 = 6$ teilbar.

Folglich sind $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$ und $(3, 2)$ die Paare mit der geforderten Eigenschaft.