

Die neuen MO-Tage sind MO-ntag und MO-nnerstag.

Liebe Schülerinnen und Schüler,

die aktuelle Corona-Krise beschäftigt auch uns Mathe-Fans. Damit ihr während dieser schweren Zeit nicht auf mathematische Herausforderungen verzichten müsst, haben wir, der Verein Mathematik-Olympiaden e.V. und das Talentförderzentrum Bildung & Begabung, die MO-Tage ins Leben gerufen.

Ab sofort veröffentlichen wir zweimal pro Woche ein Aufgabenblatt mit kniffligen Aufgaben aus den Mathematik-Olympiaden der vergangenen Jahre – jeden MO-ntag und MO-nnerstag. Pro Klassenstufe gibt es eine Aufgabe, sodass jede und jeder die eigene Schwierigkeitsstufe für sich selbst wählen kann. Zusätzlich zu dem Aufgabenblatt veröffentlichen wir außerdem ein Lösungsblatt zum letzten Aufgabenblatt.

Viel Spaß!

Serie 12 – Aufgaben

Die Lösungen werden am 07.05.2020 veröffentlicht.

Klassenstufe 3

In einem Hotel kann man im Aufzug diese Angaben finden:

7.	Zimmer 701 - 728
6.	Zimmer 601 - 632
5.	Zimmer 501 - 532
4.	Zimmer 401 - 432
3.	Zimmer 301 - 332
2.	Zimmer 201 - 232
1.	Zimmer 101 - 132
EG	Rezeption / Restaurant
UG	Tiefgarage
max. 13 Personen/1000 kg	

- a) Wie viele Zimmer befinden sich insgesamt in diesem Hotel?
- b) In der 7. Etage werden alle Zimmer von 2 Personen bewohnt. Wie oft muss der Aufzug fahren, wenn alle Bewohner dieser Etage ins Restaurant möchten und weniger als 75 kg wiegen?
- c) Vor dem Aufzug stehen 10 Personen. Dürfen alle mitfahren, wenn 4 Personen mehr als 60 kg, aber höchstens 80 kg wiegen, 2 Personen nicht schwerer als 40 kg sind und 4 Personen fast 120 kg wiegen?

Klassenstufe 4

Die Hockeymannschaften A und B spielen gegeneinander.

- a) Mannschaft A hat 2 T-Shirts (rot, gelb), 2 Hosen (weiß, schwarz) und 3 Paar Strümpfe (weiß, schwarz, blau) zur Auswahl.
Schreibe alle Möglichkeiten auf, wie sich die Spieler anziehen können.
- b) Das Spiel endet 1:3. Schreibe alle möglichen Halbzeitstände auf.
- c) Das Rückspiel endet 4:3. In der zweiten Halbzeit sind insgesamt drei Tore gefallen. Schreibe alle möglichen Halbzeitstände auf.

Klassenstufe 5

Clara hat einen Holzwürfel mit der Kantenlänge 4 cm. Drei Seitenflächen sind gelb angemalt, drei rot; die Flächen mit der gleichen Farbe treffen jeweils an einer Ecke zusammen.

Anschließend zersägt sie den großen Würfel in kleine Würfel mit der Kantenlänge 1 cm.

- a) Wie viele kleine Würfel erhält sie?
- b) Clara sortiert die Würfel nach der Anzahl der bemalten Flächen, egal ob rot oder gelb. Wie viele verschiedene Würfelsorten findet sie? Wie viele Würfel findet sie jeweils von den einzelnen Sorten?

Nun setzt Clara die kleinen Würfel zu größeren Würfeln zusammen.

- c) Kann es ihr gelingen, einen Würfel zu bauen, bei dem alle Außenflächen rot sind? Begründe deine Antwort.
- d) Wie groß ist der größte Würfel, den sie bauen kann und bei dem außen weder eine rote noch eine gelbe Fläche zu sehen ist?

Klassenstufe 6

Die vier Freundinnen Celina, Martina, Vanessa und Sarah sind sehr tierlieb und betreuen in den Ferien die Haustiere der Nachbarn. Bei den Tieren handelt es sich um ein Hamster, einen Vogel, einen Hund und eine Katze, und sie heißen - in irgendeiner Reihenfolge - Benny, Felix, Max und Mister X.

- (1) Sarah bringt ihrer Freundin Futter für den Hamster mit und erzählt von ihrem Besuch bei Benny.
- (2) Celina, die keine Katzen mag, besucht die Freundin, die den Hamster betreut. Beide tauschen Neuigkeiten aus, und Celina erzählt, dass Mister X in seinem Pflegequartier eine Lampe zerbrochen hat.
- (3) Vanessa hätte gern den Hamster oder Felix betreut, erzählt sie der Freundin, bei der gerade der Hund wohnt. Nun muss sie eine neue Lampe kaufen, weil sie nicht aufgepasst hat.
- (4) Martina ist mit ihrem Tier namens Max sehr zufrieden, umso mehr, als Sarah ihr erzählt, dass sie vor kurzem ihren Vogel einfangen musste.

Welche Freundin betreut welches Haustier, und wie heißen die Tiere?

Klassenstufe 7

Eine positive ganze Zahl soll auf Teilbarkeit durch 7 geprüft werden. Betrachtet wird die folgende Regel:

Die Einerziffer der Zahl wird gestrichen und dann wird das Doppelte der Einerziffer abgezogen. Wenn die so erhaltene Zahl durch 7 teilbar ist, dann ist auch die Ausgangszahl durch 7 teilbar.

Beispiel: Aus der zu prüfenden Zahl 539 entsteht mit der Zwischenrechnung $53\cancel{9} - 2 \cdot 9 = 53 - 18$ die Zahl 35. Da 35 durch 7 teilbar ist, ist nach der Regel auch 539 durch 7 teilbar.

- a) Zeige mit Hilfe dieser Regel, dass die Zahl 364 durch 7 teilbar ist.
- b) Zeige durch viermalige Anwendung dieser Regel, dass 3 645 068 durch 7 teilbar ist. Notiere hierzu die Zahlen, deren Teilbarkeit durch 7 zu prüfen ist. Berechne dann auch den Wert des Quotienten $3\,645\,068 : 7$ durch schriftliche Division.
- c) Beweise die Regel.

Klassenstufe 8

Professor Altmann ist Archäologe. Bei Ausgrabungen stößt er auf ein Kästchen mit zehn Hölzchen, von denen keine zwei gleich lang sind. Er weiß, dass damals kleine Längen in Fingerbreiten, als Einheit abgekürzt fb, gemessen wurden. Bei Anordnung der Hölzchen der Länge nach vom kürzesten zum längsten stellt er fest, dass die Längendifferenz aufeinanderfolgender Hölzchen konstant d Fingerbreit beträgt. Sind also a_1, a_2, \dots, a_{10} die Maßzahlen der geordneten Hölzchenlängen, so gilt $a_2 = a_1 + d, a_3 = a_2 + d, \dots, a_{10} = a_9 + d$.

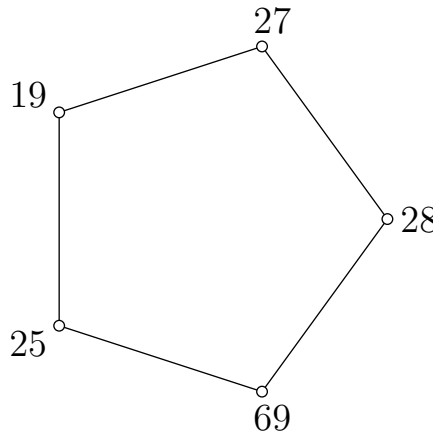
Prof. Altmann vermutet, dass die Hölzchen früher einmal der Längenmessung dienten, indem Summen durch Hintereinanderlegen und Differenzen durch Nebeneinanderlegen bei gleichem Anfangspunkt gebildet wurden. Um diese Vermutung zu untersuchen, hat er jeweils einige der Hölzchen hintereinandergelegt: Das kürzeste und zweitkürzeste Hölzchen haben zusammen eine Länge von 13 fb, die Summe der Längen des viert- bis einschließlich siebtkürzesten Hölzchens beträgt 74 fb.

- a) Bestimme allgemein die Maßzahl der Länge a_n des n -ten Hölzchens in Abhängigkeit von n und gib dann die Maßzahlen a_1, a_2, \dots, a_{10} an.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

- b) Wie kann man durch Ablegen geeigneter Hölzchen Längen von 67 fb, 2 fb und 1 fb abmessen?
- c) Untersuche, ob jede ganzzahlige Länge von 1 fb bis 34 fb durch Verwendung von jeweils höchstens 4 Hölzchen gemessen werden kann, wobei in jeder Messung jedes Hölzchen höchstens einmal verwendet werden darf.

Klassenstufe 9



Die Ecken eines Fünfecks sollen so mit positiven ganzen Zahlen beschriftet werden, dass folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Zwei Zahlen, die an benachbarten Ecken stehen, sind teilerfremd.
- (2) Zwei Zahlen, die nicht an benachbarten Ecken stehen, sind nicht teilerfremd.

Eine Beschriftung der Ecken des Fünfecks entsprechend den gegebenen Bedingungen nennen wir *zulässig*.

Beispielsweise ist die Beschriftung der Ecken des Fünfecks mit den Zahlen 28, 69, 25, 19 und 27 im Uhrzeigersinn nicht zulässig, denn die Zahlen 28 und 19 liegen nicht an benachbarten Ecken, sind aber teilerfremd. Somit ist Bedingung (2) nicht erfüllt.

- a) Weisen Sie nach, dass die Zahl 2 in keiner zulässigen Beschriftung enthalten ist.
- b) Finden Sie eine zulässige Beschriftung und weisen Sie nach, dass die angegebene Beschriftung die geforderten Eigenschaften hat.

Klassenstufe 10

Untersuchen Sie für jede der folgenden Teilaufgaben, ob es Primzahlen x , y und z gibt, die die jeweilige Gleichung erfüllen.

a) $y = z^2 - x^2$.

b) $x^2 + y = z^4$.

c) $x^2 + y^3 = z^4$.

Klassenstufen 11–13

Für welche positiven ganzen Zahlen n gibt es eine Quadratzahl, deren letzte n Ziffern in der Dezimaldarstellung sämtlich gleich 4 sind?