BUNDESWEITE MATHEMATIK-WETTBEWERBE
Bildung & Begabung

MO-Tage

Serie 12 – Lösungen

Klassenstufe 3

a) Etagen 1 bis 6: 32 Zimmer $\Longrightarrow$ $6 \times 32 = 192$

Etage 7: 28 Zimmer $\Longrightarrow$ $1 \times 28 = 28$

$$192 + 28 = 220$$

Im Hotel befinden sich 220 Zimmer.

b) $28 \times 2 = 56$

$13 \times 75\,\text{kg} = 975\,\text{kg} < 1000\,\text{kg}$, also dürfen 13 Personen je Fahrt mitfahren.

$56 : 13 = 4$ Rest 4

Der Aufzug muss also fünfmal fahren.

c) Maximales Gewicht aller Personen:

$4 \times 80\,\text{kg} = 320\,\text{kg}$

$2 \times 40\,\text{kg} = 80\,\text{kg}$

$4 \times 120\,\text{kg} = 480\,\text{kg}$

$320\,\text{kg} + 80\,\text{kg} + 480\,\text{kg} = 880\,\text{kg}$

Es können alle Personen mitfahren.

Klassenstufe 4

Teil a) Es gibt 12 Möglichkeiten.

T-Shirt	Hose	Strümpfe		T-Shirt	Hose	Strümpfe
rot	weiß	weiß		gelb	weiß	weiß
rot	weiß	schwarz		gelb	weiß	schwarz
rot	weiß	blau		gelb	weiß	blau
rot	schwarz	weiß		gelb	schwarz	weiß
rot	schwarz	schwarz		gelb	schwarz	schwarz
rot	schwarz	blau		gelb	schwarz	blau

Teil b)

0:0	1:0
0:1	1:1
0:2	1:2
0:3	1:3

Teil c)

4:0
3:1
2:2
1:3

Klassenstufe 5

Teil a) Sie erhält $(4 \cdot 4 \cdot 4 =)\,64$ kleine Würfel.

Teil b) Es ist nützlich, sich vorher zu überlegen, dass ein Würfel 6 Seitenflächen, 12 Kanten und 8 Ecken hat.

Weiterhin: Ein kleiner Würfel kann maximal drei farbige Flächen haben, wenn er ein Eckwürfel ist. Er hat keine farbigen Flächen, wenn er sich im Inneren des großen Würfels befindet.

Anzahl farbiger Flächen	Anzahl der kleinen Würfel dieser Sorte
3	Alle Eckwürfel: 8
2	Alle Würfel, die an den 12 Kanten, aber nicht an einer Ecke des großen Würfels liegen – das sind pro Kante 2 Würfel. Insgesamt gibt es davon $12 \cdot 2 = 24$.
1	Alle Würfel auf den 6 Seitenflächen, die keine Kante des großen Würfels berühren – das sind pro Fläche $2 \cdot 2 = 4$ Würfel. Insgesamt gibt es davon $6 \cdot 4 = 24$.
0	Alle inneren Würfel: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Probe: Die Summe der Würfelanzahlen aller Sorten beträgt $(8+24+24+8 =)\,64$. Damit sind alle kleinen Würfel jeweils einer Sorte zugeordnet.

Teil c) Nein, Clara kann keinen roten Würfel bauen, weil sie dazu 8 Eckwürfel mit drei roten Seitenflächen benötigt. Es gibt aber nur einen Würfel mit drei roten Seitenflächen.

Teil d) Der größte Würfel ohne von außen sichtbare Farbflächen, den Clara bauen kann, hat wieder eine Kantenlänge von 4 cm, denn:

Da jeder kleine Würfel mindestens drei unbemalte Seitenflächen hat, die an einer Ecke zusammentreffen, kann sie vom ursprünglichen großen Würfel alle außenliegenden kleinen Würfel so umdrehen, dass die farbigen Seitenflächen nach innen zeigen.

Klassenstufe 6

Aus den Aussagen (1) bis (4) folgt:

Der Hamster wird nicht von Sarah [siehe (1)], nicht von Celina [siehe (2)] und auch nicht von Vanessa [siehe (3)] betreut; er ist folglich bei Martina untergebracht und heißt Max [siehe (4)].

Die Katze wohnt nicht bei Celina [siehe (2)] und auch nicht bei Sarah [siehe (4)]; sie wird von Vanessa betreut. Da Vanessa eine neue Lampe kaufen muss [siehe (3)] und Mister X sie zerstört hat [siehe (2)], muss die Katze Mister X heißen (und ist dann wohl ein Kater).

Sarah betreut den Vogel [siehe (4)], der nicht Benny heißen kann [siehe (1)]. Die Namen „Max" und „Mister X" sind auch schon vergeben, so bleibt nur der Name „Felix".

Für Celina bleibt der Hund mit dem Namen „Benny" übrig.

Zusammenfassung:

Martina betreut den Hamster Max.

Vanessa betreut den Kater (oder die Katze) Mister X.

Sarah betreut den Vogel Felix.

Celina betreut den Hund Benny.

Klassenstufe 7

Teil a) Durch Anwenden der Regel erhält man aus 364 mit der Zwischenrechnung $36\cancel{4} - 2 \cdot 4 = 36 - 8$ die Zahl 28. Da 28 durch 7 teilbar ist, ist nach dieser Regel auch 364 durch 7 teilbar.

Teil b) Notiert wird die Ausgangszahl 3 645 068 und dann die Zahl, welche sich durch Streichen der Einerziffer und dann dem Abziehen des Doppelten dieser gestrichenen Einerziffer ergibt. Mit dem Ergebnis wird als neue Ausgangszahl fortgesetzt und das Verfahren so viermal durchgeführt, wobei die rechts angegebenen Rechnungen im Kopf durchgeführt werden können:

$$\begin{array}{rl}
3\,645\,068 & \mid 364\,506\cancel{8} - 2 \cdot 8 \\
364\,490 & \mid 36\,449\cancel{0} - 2 \cdot 0 \\
36\,449 & \mid 3\,644\cancel{9} - 2 \cdot 9 \\
3\,626 & \mid 362\cancel{6} - 2 \cdot 6 \\
350 &
\end{array}$$

Da 350 durch 7 teilbar ist, sind nach der Regel 3 626, 36 449, 364 490 und schließlich auch 3 645 068 durch 7 teilbar.

Mit schriftlicher Division

```
3645068:7=520724
35
‾‾
 14
 14
 ‾‾
  05
   0
  ‾‾
   50
   49
   ‾‾
    16
    14
    ‾‾
     28
     28
     ‾‾
      0
```

ergibt sich 520 724 als Wert des Quotienten.

Teil c) Es sei n eine beliebige positive ganze Zahl und es seien $e \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ ihre Einerziffer und m die Zahl, die aus n durch Streichen der Einerziffer entsteht. Es gilt also $n = 10m + e$ mit $e \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Aus $n = 10m + e$ folgt

$$n = 10m + e = 10m - 20e + 20e + e = 10 \cdot (m - 2e) + 21e\,.$$

Da e eine ganze Zahl ist und 21 durch 7 teilbar ist, ist $21e$ durch 7 teilbar. Da 10 nicht durch 7 teilbar ist, ist n daher genau dann durch 7 teilbar, wenn $m - 2e$ durch 7 teilbar ist.

Klassenstufe 8

Teil a) Nach Voraussetzung gilt $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$, $a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$ und allgemein

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d\,. \tag{1}$$

Nach Voraussetzung gilt $a_1 + a_2 = 13$ und wegen $a_2 = a_1 + d$ daher

$$2a_1 + d = 13\,. \tag{2}$$

Nach Voraussetzung gilt weiter $a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 74$. Durch Einsetzen von (1) für $n = 4, 5, 6, 7$ folgt $a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) + (a_1 + 6d)$ und daher

$$4a_1 + 18d = 74\,. \tag{3}$$

Aus (2) folgt $d = 13 - 2a_1$. Einsetzen in (3) ergibt $4a_1 + 18 \cdot 13 - 36a_1 = 74$, also $32a_1 = 160$ und daher $a_1 = 5$. Wegen (2) folgt hieraus $d = 3$.

Wegen (1) besitzt das n-te Hölzchen daher eine Länge von a_n Fingerbreiten mit

$$a_n = 5 + 3 \cdot (n-1) = 2 + 3n\,.$$

Daher gilt

$$\begin{array}{lllll} a_1 = 5, & a_2 = 8, & a_3 = 11, & a_4 = 14, & a_5 = 17, \\ a_6 = 20, & a_7 = 23, & a_8 = 26, & a_9 = 29, & a_{10} = 32. \end{array}$$

Teil b) Es gilt $67 = 26+17+11+8+5 = a_8+a_5+a_3+a_2+a_1$. Es können also das erste, das zweite, das dritte, das fünfte und das achte Hölzchen aneinandergelegt werden, damit eine Gesamtlänge von 67 fb entsteht.

Wegen $2 = 13 - 11 = (5+8) - 11 = a_1 + a_2 - a_3$ kann eine Länge von 2 fb abgemessen werden, indem zunächst das erste und zweite Hölzchen zusammengefügt und dann das dritte Hölzchen in entgegengesetzter Richtung angelegt wird.

Wegen $1 = 14 - 8 - 5 = a_4 - a_2 - a_1$ kann auch eine Länge von 1 fb mit den Hölzchen abgemessen werden.

Teil c) Nach Teil b) kann eine Länge von 2 fb unter jeweils einmaliger Nutzung der drei kürzesten Hölzchen gemessen werden. Durch entsprechendes Anlegen können daher die Längen des vierten bis zehnten Hölzchens um 2 fb verkürzt bzw. verlängert werden:

Aus $a_k - (a_1 + a_2 - a_3)$ erhält man für $k = 4$ bis $k = 10$ die Maßzahlen

$$12\,, \quad 15\,, \quad 18\,, \quad 21\,, \quad 24\,, \quad 27\,, \quad 30\,,$$

aus $a_k + (a_1 + a_2 - a_3)$ für $k = 4$ bis $k = 10$ die Maßzahlen

$$16\,, \quad 19\,, \quad 22\,, \quad 25\,, \quad 28\,, \quad 31\,, \quad 34$$

und wegen $a_1+a_2 = 13$ sowie $a_4+a_{10}-a_1-a_2 = 33$ folglich alle ganzen Maßzahlen von 11 bis 34.

Wegen $1 = a_4 - a_1 - a_2$, $2 = a_1 + a_2 - a_3$, $3 = a_2 - a_1$, $4 = a_5 - a_1 - a_2$, $5 = a_1$, $6 = a_3 - a_1$, $7 = a_6 - a_1 - a_2$, $8 = a_2$, $9 = a_4 - a_1$, $10 = a_7 - a_1 - a_2$ können daher alle ganzzahligen Längen von 1 fb bis 34 fb durch jeweils höchstens 4 Hölzchen gemessen werden, wobei in jeder Messung jedes Hölzchen höchstens einmal verwendet wird.

Klassenstufe 9

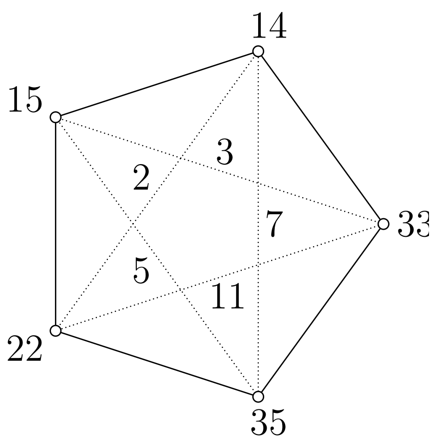
Teil a) Wir führen den Nachweis indirekt. Angenommen, die Zahl 2 ist in einer zulässigen Beschriftung enthalten. Dann gibt es zwei Ecken des Fünfecks, die nicht an einer gleichen Seite anliegen wie die Ecke, die mit 2 beschriftet wurde. Diese zwei Ecken müssen mit Zahlen beschriftet sein, die nicht teilerfremd zu 2 und somit gerade sind. Diese beiden Zahlen sind nicht teilerfremd, sind aber benachbart. Somit ergibt sich ein Widerspruch zu Bedingung (1). Also kann die Zahl 2 nicht in einer zulässigen Beschriftung enthalten sein.

Teil b) Im Folgenden wird das Beispiel einer Beschriftung konstruiert, das unter allen zulässigen Beschriftungen den kleinstmöglichen Wert der größten der fünf Zahlen liefert.

Das Fünfeck hat fünf Diagonalen. Jeder dieser Diagonalen ordnen wir eine andere Primzahl zu (diese sind paarweise teilerfremd). In jeder Ecke des Fünfecks enden zwei Diagonalen. Wir beschriften nun jede Ecke mit dem Produkt der zwei Primzahlen, die den Diagonalen zugeordnet sind, die im jeweiligen Eckpunkt enden.

In benachbarten Ecken enden keine gleichen Diagonalen, somit sind die Zahlen in benachbarten Ecken teilerfremd und (1) ist erfüllt. Da nicht benachbarte Ecken über eine Diagonale verbunden sind, sind die Zahlen an diesen Ecken beide durch die Primzahl teilbar, die dieser Diagonalen zugeordnet ist, und damit nicht teilerfremd und (2) ist erfüllt.

Ordnen wir den fünf Diagonalen des Fünfecks im Uhrzeigersinn die Primzahlen 3, 7, 11, 5 und 2 zu, so ergibt sich damit eine zulässige Beschriftung der Ecken des Fünfecks mit den Zahlen 33, 35, 22, 15 und 14 (im Uhrzeigersinn).



Klassenstufe 10

Teil a) Wir faktorisieren die rechte Seite der gegebenen Gleichung und erhalten $y = (z - x) \cdot (z + x)$.

Somit ist y das Produkt zweier ganzer Zahlen. Da x und z Primzahlen sein sollen, gilt $z + x \geq 4$ und somit kann y nur dann eine Primzahl sein, wenn $z - x = 1$ und damit $z = 1 + x$ gilt. Dies gilt nur für $x = 2$ und $z = 3$. In diesem Fall ergibt sich $y = z^2 - x^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$.

Da 5 eine Primzahl ist, gibt es eine Lösung der gegebenen Gleichung, nämlich: $x = 2$, $y = 5$ und $z = 3$.

Teil b) Wir stellen die Gleichung um und faktorisieren anschließend

$$y = z^4 - x^2 = (z^2 - x) \cdot (z^2 + x)\,.$$

Damit ist y das Produkt zweier ganzer Zahlen. Da x und z Primzahlen sein sollen, gilt $z^2 + x \geq 6$ und somit kann y nur dann eine Primzahl sein, wenn $z^2 - x = 1$ und damit $z^2 = 1 + x$ gilt. Für $x = 2$ erhält man $z^2 = 3$. Da es keine Primzahl z gibt, die diese Gleichung erfüllt, gibt es keine Lösung für $x = 2$.

Ist x eine Primzahl größer als 2, dann ist der Term $1 + x$ und somit z^2 gerade. Damit muss auch z gerade sein, dies ist nur für $z = 2$ erfüllt. Es ergibt sich $x = z^2 - 1 = 3$ und wir erhalten $y = z^4 - x^2 = 2^4 - 3^2 = 16 - 9 = 7$.

Die einzige Lösung der gegebenen Gleichung ist somit $x = 3$, $y = 7$ und $z = 2$.

Teil c) Wenn es Primzahlen x, y und z gibt, die diese Gleichungen erfüllen, dann müssen entweder alle drei Zahlen gerade sein oder genau eine der drei Zahlen ist gerade.

Die erste Möglichkeit kann ausgeschlossen werden, da $2^2 + 2^3 \neq 2^4$ gilt.

Für die zweite Möglichkeit unterscheiden wir drei Fälle:

Fall 1: Für $x = 2$ erhalten wir $y^3 = z^4 - 4 = \left(z^2 + 2\right)\left(z^2 - 2\right)$ und wegen der Primzahleigenschaft von y (und weil $z^2 + 2 > z^2 - 2$ gilt) muss entweder $z^2 + 2 = y^3$ und $z^2 - 2 = 1$ gelten oder $z^2 + 2 = y^2$ und $z^2 - 2 = y$.
Die erste dieser beiden Möglichkeit entfällt, da $z^2 - 2 = 1$ auf $z^2 = 3$ führt und diese Gleichung keine ganzzahlige Lösung besitzt.
Zur Untersuchung der zweiten Möglichkeit bilden wir die Differenz beider Gleichungen. Es ergibt sich $4 = y^2 - y = y \cdot (y - 1)$. Da y eine ungerade Primzahl ist, gilt $y \cdot (y - 1) \geq 6$, was einen Widerspruch zu $4 = y \cdot (y - 1)$ darstellt. Damit gibt es in diesem Fall keine Lösung.

Fall 2: Gilt $y = 2$, dann ist $8 = z^4 - x^2 = \left(z^2 + x\right)\left(z^2 - x\right)$. Da x und z in diesem Fall ungerade sind, sind die Terme $\left(z^2 + x\right)$ und $\left(z^2 - x\right)$ beide gerade und es gilt $z^2 + x \geq 12$ und $z^2 - x > 1$, was im Widerspruch zu $8 = \left(z^2 + x\right)\left(z^2 - x\right)$ steht. Somit gibt es in diesem Fall keine Lösung.

Fall 3: Wenn $z = 2$ gilt, ergibt sich $x^2 + y^3 = 16$. Da x und y ungerade Primzahlen sind, erhält man $x^2 + y^3 \geq 9 + 27 = 36$. Dies stellt einen Widerspruch zu $x^2 + y^3 = 16$ dar und deshalb gibt es in diesem Fall keine Lösung.

Es gibt also keine Primzahlen x, y, z, für die $x^2 + y^3 = z^4$ gilt.

Klassenstufen 11–13

Es gibt nur für $n = 1, 2, 3$ solche Quadratzahlen.

Man findet $2^2 = 4$, $12^2 = 144$ und $38^2 = 1444$. Es wird indirekt gezeigt, dass für $n = 4$ keine solche Quadratzahl existiert, wodurch sofort auch $n > 4$ ausgeschlossen ist.

Angenommen, es gäbe eine Quadratzahl k^2, deren letzte 4 Ziffern gleich 4 sind. Dann lässt sich

$$k^2 = 10^4 \cdot a + 4444 \tag{4}$$

mit einer ganzen Zahl a schreiben. Wegen $4|k^2$ ist dann auch $k^2/4 = (k/2)^2$ das Quadrat einer positiven ganzen Zahl. Es folgt

$$\frac{k^2}{4} = \frac{10^4}{4} \cdot a + 1111 = 25 \cdot 10^2 \cdot a + 11 \cdot 100 + 11\,,$$

die Quadratzahl $k^2/4$ endet also in Dezimaldarstellung auf die Ziffern 11.

Die Zahl $k/2$ muss in Dezimaldarstellung auf eine der Ziffern 1 oder 9 enden, denn die letzte Ziffer von $k^2/4$ ist gleich 1. Folglich gilt $k/2 = 10b \pm 1$ mit einer ganzen Zahl b und

$$\left(\frac{k}{2}\right)^2 = 100b^2 \pm 20b + 1\,.$$

Somit hat $k^2/4$ eine gerade Zehnerziffer, kann also nicht auf 11 enden.

Die Existenz einer Quadratzahl im Sinne der Aufgabenstellung ist damit für $n \geq 4$ ausgeschlossen.