BUNDESWEITE MATHEMATIK-WETTBEWERBE
Bildung & Begabung

MO-Tage

Serie 13 – Lösungen

Klassenstufe 3

Teil a) Es finden 3 Spiele statt.

A gegen B B gegen C

A gegen C

Teil b) 6 Möglichkeiten

1. Platz	2. Platz	3. Platz
A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

Klassenstufe 4

Teil a) Die Zahl heißt 2302.

Teil b) Die neue Zahl heißt 3022.

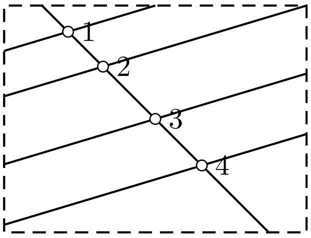
Teil c) 5002

Teil d) 4300

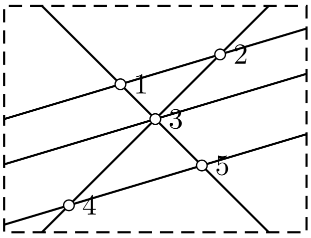
Teil e) 2, 11, 20, 101, 110, 200, 1001, 1010, 1100, 2000

Klassenstufe 5

Teil a)

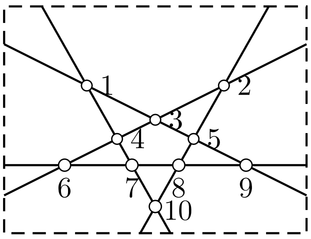


Teil b)



Teil c) Die Maximalzahl ist aus folgendem Grund 10. Jede Gerade kann höchstens vier andere Geraden schneiden. Da jeder Schnittpunkt bei zwei Geraden gezählt wird, ergeben sich maximal $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$ Schnittpunkte.

Wie die Abbildung zeigt, wird diese Zahl auch erreicht – es ergibt sich das bekannte Pentagramm.



Klassenstufe 6

Teil a) Die Wurfweiten der Kinder werden mit den Anfangsbuchstaben ihrer Namen abgekürzt. Da alle zusammen 154 m weit geworfen haben, ergibt sich die Gleichung:

$$A + B + J + D + P + M = 154\,\text{m}.$$

Alle Wurfweiten werden mit der Weite von Annika verglichen, so dass die Wurfweiten der anderen Kinder durch die von Annika ausgedrückt werden können:

(1) $B = A + 6\,\text{m}$, (2) $J = A + 11\,\text{m}$, (3) $D = J = A + 11\,\text{m}$,
(4) $P = A + 9\,\text{m}$, (5) $M = A + 3\,\text{m}$.

Die Addition aller Weiten ergibt dann $6A + 40\,\mathrm{m} = 154\,\mathrm{m}$.

Daraus folgt $6A = (154\,\mathrm{m} - 40\,\mathrm{m} =)114\,\mathrm{m}$ und somit $A = (114\,\mathrm{m} : 6 =)19\,\mathrm{m}$.

Für die Kinder ergeben sich damit die folgenden Weiten:

Annika wirft $19\,\mathrm{m}$ weit, Bea $(19\,\mathrm{m} + 6\,\mathrm{m} =)$ $25\,\mathrm{m}$, Jens $(19\,\mathrm{m} + 11\,\mathrm{m} =)$ $30\,\mathrm{m}$, Dominic auch $30\,\mathrm{m}$, Paul $(19\,\mathrm{m} + 9\,\mathrm{m} =)$ $28\,\mathrm{m}$ und Maike $(19\,\mathrm{m} + 3\,\mathrm{m} =)$ $22\,\mathrm{m}$.

Alle Kinder warfen zusammen $(19\,\mathrm{m} + 25\,\mathrm{m} + 30\,\mathrm{m} + 30\,\mathrm{m} + 28\,\mathrm{m} + 22\,\mathrm{m} =)$ $154\,\mathrm{m}$.

Teil b) Wenn Jens eineinhalb Mal so weit geworfen hat wie Annika, dann muss man zur Weite von Annika noch mal die Hälfte ihrer Wurfweite dazu zählen und das sind $11\,\mathrm{m}$. Dann muss Annika $(2 \cdot 11\,\mathrm{m} =)$ $22\,\mathrm{m}$ weit geworfen haben.

Für die Kinder ergeben sich damit die folgenden Weiten:

Annika wirft $22\,\mathrm{m}$ weit, Bea $(22\,\mathrm{m} + 6\,\mathrm{m} =)$ $28\,\mathrm{m}$, Jens $(22\,\mathrm{m} + 11\,\mathrm{m} =)$ $33\,\mathrm{m}$, Dominic auch $33\,\mathrm{m}$, Paul $(22\,\mathrm{m} + 9\,\mathrm{m} =)$ $31\,\mathrm{m}$ und Maike $(22\,\mathrm{m} + 3\,\mathrm{m} =)$ $25\,\mathrm{m}$.

Alle Kinder warfen zusammen $(22\,\mathrm{m}+28\,\mathrm{m}+33\,\mathrm{m}+33\,\mathrm{m}+31\,\mathrm{m}+25\,\mathrm{m} =)$ $172\,\mathrm{m}$.

Klassenstufe 7

Wir bezeichnen die Anzahl der Schüler in dieser Klassenstufe mit x. Dann gilt laut Aufgabenstellung

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{9}x + 10 = x\,.$$

Durch äquivalentes Umformen folgen hieraus

$$\begin{aligned} x - \frac{31}{36}x &= 10\,, \\ \frac{5}{36}x &= 10 \end{aligned}$$

und schließlich $x = 72$.

Den Spanisch-Kurs wählten folglich $(\frac{72\cdot 3}{4} =)$ 54 Schüler und den Russisch-Kurs $(\frac{72}{9} =)$ 8 Schüler.

Klassenstufe 8

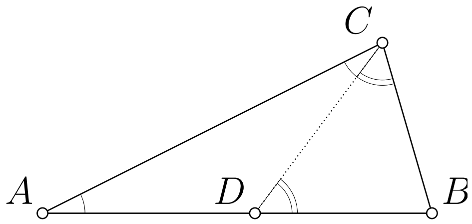
Die gesuchte Masse der Pralinen der ersten Sorte sei x kg. Von der zweiten Sorte werden folglich $(10-x)$ kg benötigt. Pro Kilogramm kosten die Pralinen der ersten Sorte 23 € und die Pralinen der zweiten Sorte 18 €. Der Verkaufspreis soll pro Kilogramm 20 € betragen. Daher erhält man für die Gesamtmasse von 10 kg den in Euro angegebenen Verkaufspreis durch

$$\begin{aligned} 23 \cdot x + 18 \cdot (10 - x) &= 200\,, \\ 23 \cdot x + 180 - 18 \cdot x &= 200\,, \\ 5 \cdot x &= 20 \end{aligned}$$

und hieraus $x = 4$.

Es werden also 4 kg Pralinen der ersten Sorte benötigt.

Klassenstufe 9



Wir führen die Bezeichnung $|\sphericalangle BAC| = \alpha$ ein. Für die gewünschte Zerlegung wählen wir einen Punkt D so auf der Strecke $\overline{AB}$, dass $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BAC| = \alpha$ und somit $|\sphericalangle DCB| = 2\,\alpha$ gilt. Diese Wahl ist stets möglich, da $|\sphericalangle ACD| < |\sphericalangle ACB|$ gilt.

Das Teildreieck ADC besitzt damit zwei Innenwinkel der Größe α und ist daher gleichschenklig. Der Winkel BDC hat als Außenwinkel am Dreieck ADC die Größe $\alpha + \alpha = 2\,\alpha$. Die Größe des Winkels DCB ergibt sich aus $|\sphericalangle\, DCB| = |\sphericalangle\, ACB| - |\sphericalangle\, ACD| = 3\alpha - \alpha = 2\alpha$. Damit besitzt das Teildreieck DBC durch die gewählte Zerlegung zwei Innenwinkel der Größe $2\,\alpha$. Somit ist es ebenfalls gleichschenklig.

Da die Basiswinkel beider Dreiecke verschieden groß sind, sind die Dreiecke auch nicht kongruent. Die Behauptung in der Aufgabenstellung ist folglich bewiesen.

Klassenstufe 10

Wir bezeichnen mit x und y die Anzahl der Wanderwege zwischen B und D bzw. zwischen C und D. Alle Wanderrouten von B nach D erhält man wie folgt. Man kann direkt einen Wanderweg von B nach D gehen, das liefert x Möglichkeiten. Geht man hingegen von B nach C und dann nach D, liefert dies $2 \cdot y$ Wanderrouten. Geht man von B nach C, dann nach A und dann nach D, erhält man $2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$ Wanderrouten. Geht man von B nach A und dann nach D, erhält man $3 \cdot 5 = 15$ Wanderrouten. Geht man von B nach A, dann nach C und dann nach D, erhält man $3 \cdot 4 \cdot y$ Wanderrouten. Insgesamt erhält man daraus die Gleichung

$$x + 2\,y + 40 + 15 + 12\,y = 104\,,$$

also

$$x + 14\,y = 49\,.$$

Analog erhält man für die Routen von C nach D die Gleichung

$$y + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot x + 2 \cdot x + 2 \cdot 3 \cdot 5 = 151\,,$$

also

$$14\,x + y = 101\,.$$

Addition und Division durch 15 bzw. Subtraktion und Division durch 13 der so gewonnenen Gleichungen liefert die Gleichungen

$$x + y = 10\,,$$
$$x - y = 4\,.$$

Erneute Addition bzw. Subtraktion beider Gleichungen liefert jeweils nach Division durch 2 die Werte $x = 7$ und $y = 3$.

Von A nach C gibt es dann $4 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot y + 5 \cdot x \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot y = 158$ Wanderrouten.

Klassenstufen 11–13

Angenommen, für eine Zahl z existieren m und n mit den gewünschten Eigenschaften. Dann folgt durch Auflösen der Gleichungen (1) und (2) nach z

$$z = n^2 + m^4 = (n+1)^2 - 2^m\,, \tag{1}$$

also gilt wegen $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ die Beziehung

$$m^4 + 2^m = 2n + 1\,.$$

Da $m > 0$ sein soll, ist 2^m gerade, und folglich muss m ungerade sein. Für jedes ungerade $m \geq 1$ kann man aus dieser Gleichung eindeutig ein ganzzahliges n bestimmen:

$$n = \frac{1}{2}\left(m^4 + 2^m - 1\right).$$

Einsetzen von m und n in (3) liefert für jedes ungerade m eine (ganze) Zahl z und damit eine Lösung des Gleichungssystems (1), (2). Zu untersuchen ist nun noch, für welche dieser Zahlen $z \leq 100\,000$ gilt.

Für $m = 1$ und $m = 3$ erhalten wir

$$\begin{array}{lllllllll} m = 1: & m^4 + 2^m = 3 & \Rightarrow & n = 1 & \Rightarrow & z = 2\,, \\ m = 3: & m^4 + 2^m = 89 & \Rightarrow & n = 44 & \Rightarrow & z = 2017\,. \end{array}$$

Für $m \geq 5$ gilt $m^4 \geq 625 > 620$ und $2^m \geq 32 > 21$, also $2n+1 = m^4+2^m > 641$. Daraus folgt $n > 320$ und schließlich $z > n^2 > 102\,400 > 100\,000$.

Es gibt also genau zwei Zahlen z mit der geforderten Eigenschaft, nämlich $z_1 = 2$ und
$z_2 = 2017$.