BUNDESWEITE
MATHEMATIK-WETTBEWERBE
Bildung & Begabung

MO-Tage

Die neuen MO-Tage sind MO-ntag und MO-nnerstag.

Liebe Schülerinnen und Schüler,

die aktuelle Corona-Krise beschäftigt auch uns Mathe-Fans. Damit ihr während dieser schweren Zeit nicht auf mathematische Herausforderungen verzichten müsst, haben wir, der Verein Mathematik-Olympiaden e.V. und das Talentförderzentrum Bildung & Begabung, die MO-Tage ins Leben gerufen.
Ab sofort veröffentlichen wir zweimal pro Woche ein Aufgabenblatt mit kniffligen Aufgaben aus den Mathematik-Olympiaden der vergangenen Jahre – jeden MO-ntag und MO-nnerstag. Pro Klassenstufe gibt es eine Aufgabe, sodass jede und jeder die eigene Schwierigkeitsstufe für sich selbst wählen kann. Zusätzlich zu dem Aufgabenblatt veröffentlichen wir außerdem ein Lösungsblatt zum letzten Aufgabenblatt.
Viel Spaß!

Serie 14 – Aufgaben

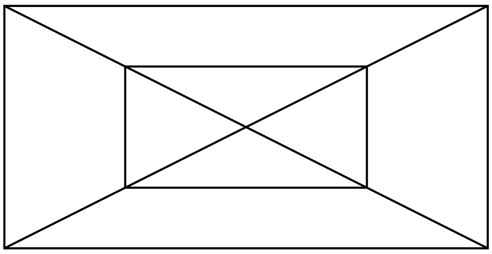
Die Lösungen werden am 14.05.2020 veröffentlicht.

Klassenstufe 3

Färbe die Muster nach folgenden Bedingungen. Ein Feld darf nur mit einer Farbe ausgemalt werden. Benachbarte Felder müssen verschiedene Farben haben. Benutze die geringste Anzahl unterschiedlicher Farben. Zeichne deine Lösungen ein und gib jeweils die Anzahl der benötigten Farben an.

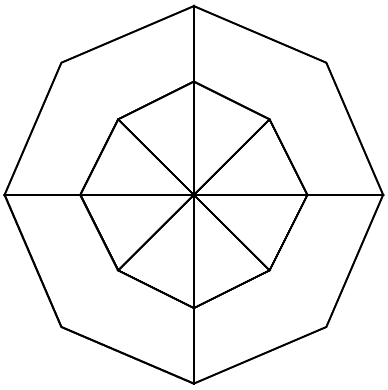
Hinweis: Benachbarte Felder haben eine gemeinsame Seite.

a)



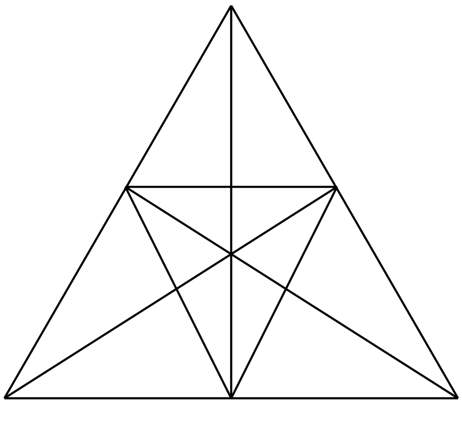
Anzahl der Farben: _____

b)



Anzahl der Farben: _____

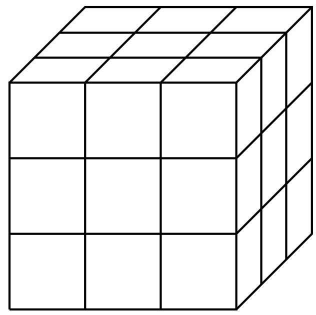
c)



Anzahl der Farben: _____

d) Erfinde selber ein Muster, bei dem nach den Bedingungen von oben mindestens 3 Farben benötigt werden. Zeichne dein Muster und färbe es ein.

Klassenstufe 4



27 kleine Würfel werden zu einem großen Würfel zusammengebaut und anschließend gefärbt.
Die 6 Flächen haben folgende Farben:
Schwarz, weiß, rot, blau, grün und gelb. Schwarz und weiß, rot und blau, grün und gelb liegen sich jeweils gegenüber.

a) Wie viele der kleinen Würfel wurden nicht gefärbt?
b) Bei wie vielen Würfeln wurde nur **eine** Fläche gefärbt?
c) Bei wie vielen Würfeln wurden nur **zwei** Flächen gefärbt?
d) Gib die Farben aller Eckwürfel an.

Klassenstufe 5

Christoph ist Koch in einem Restaurant, das jeden Tag bis auf Montag und Dienstag geöffnet ist und das für seine Semmelknödel berühmt ist. An einem gewöhnlichen Öffnungstag kocht Christoph 90 Knödel; an den Wochenenden kommen mehr Gäste, und so muss Christoph dann am Sonnabend und am Sonntag jeweils 140 Knödel am Tag kochen.

a) Wie viele Knödel muss Christoph im Jahr 2012 insgesamt kochen?
b) An welchem Tag des Jahres kocht Christoph den 2012. Knödel des Jahres 2012?

Hinweis: Das Jahr 2012 begann mit einem Sonntag und ist ein Schaltjahr; der Silvestertag 2012 ist ein Montag.

Klassenstufe 6

Bettina und Luca schneiden sich jeweils ein Quadrat aus. Danach schneiden sie jeweils parallel zu einer Quadratseite Teile ihrer Quadrate ab.

a) Bettinas erster Schnitt halbiert die Fläche des ursprünglichen Quadrats. Dann schneidet sie von der Restfigur wieder die Hälfte ab und erhält erneut ein Quadrat. Sie schneidet jetzt noch zweimal jeweils die Hälfte ab und erhält danach wiederum ein Quadrat. Sie misst nach und stellt fest, dass am Ende ihr letztes Quadrat eine Fläche von $16\,\text{cm}^2$ hat.
Welche Seitenlänge hatte Bettinas Quadrat am Anfang?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

b) Luca schneidet von seinem anfänglichen Quadrat zunächst $\frac{1}{4}$ der Fläche weg, dann noch mal $\frac{1}{4}$ und erhält wieder ein Quadrat. Von diesem Quadrat schneidet er wieder parallel zu den Seiten $\frac{1}{3}$ der Fläche ab und dann im vierten Schnitt noch einmal $\frac{1}{3}$ der Fläche. Das Ergebnis ist wieder ein Quadrat, das – wie Bettinas Quadrat – ebenfalls einen Flächeninhalt von $16\,\text{cm}^2$ hat. Welchen Flächeninhalt hatte Lucas Quadrat am Anfang?

Klassenstufe 7

Marie gibt ihrer Freundin Elisabeth einen Würfel. Elisabeth würfelt dreimal. Marie fordert sie auf, folgende Rechnung durchzuführen: „Verdopple die erste gewürfelte Zahl, addiere zum erhaltenen Ergebnis 5, multipliziere die erhaltene Summe mit 5, addiere dazu die zweite gewürfelte Zahl, multipliziere das erhaltene Ergebnis mit 10 und addiere dazu jetzt noch die dritte gewürfelte Zahl.“ Elisabeth gibt das Ergebnis 885 an. „Jetzt weiß ich, welche drei Zahlen du gewürfelt hast“, sagt Marie.

Zeige, dass man diese drei Zahlen tatsächlich eindeutig bestimmen kann, und gib sie in der von Elisabeth gewürfelten Reihenfolge an.

Klassenstufe 8

Gegeben sind ein Quadrat $ABCD$ und zwei Punkte R und S. Das Quadrat $ABCD$ hat die Seitenlänge $9\,\text{cm}$. Der Punkt R liegt auf der Diagonalen $\overline{AC}$ derart, dass die Strecke $\overline{AR}$ halb so lang wie die Strecke $\overline{CR}$ ist. Der Punkt S liegt auf der Seite $\overline{CD}$ derart, dass die Strecke $\overline{CS}$ halb so lang wie die Strecke $\overline{DS}$ ist.

a) Zeichne das Quadrat $ABCD$ und das Viereck $BCSR$.

b) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $BCSR$.

c) Berechne die Größe des Winkels BRS.

Hinweis: Alle gesuchten Größen sollen aus den geometrischen Gegebenheiten exakt bestimmt werden. Messungen mit Lineal oder Geodreieck sind in diesem Sinne niemals exakt.

Klassenstufe 9

Wir untersuchen die Gleichungen

$$a + b = 2 \tag{1}$$

$$\text{und} \quad \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{4}{3}\,. \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, dass das Paar $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$ keine gemeinsame Lösung der Gleichungen (1) und (2) ist.

b) Geben Sie eine gemeinsame Lösung (a, b) beider Gleichungen an.

c) Bestimmen Sie alle Paare (a, b) rationaler Zahlen, die gemeinsame Lösung der Gleichungen (1) und (2) sind.

Klassenstufe 10

Gegeben sind die beiden quadratischen Funktionen a und b mit den Gleichungen

$$a(x) = -2\,(x-2)\,(x-6) \quad \text{und} \quad b(x) = -\frac{1}{6}\,x^2 + \frac{8}{3}\,x - \frac{14}{3}\,.$$

a) Weisen Sie nach, dass beide Funktionen eine gemeinsame Nullstelle besitzen.

b) Die Funktion b hat eine zweite Nullstelle. Bestimmen Sie diese.

c) Eine quadratische Funktion c hat eine Nullstelle $x_1 = 2$ und ihr Graph den Scheitelpunkt $S_c(6, 7)$. Ermitteln Sie eine Gleichung für c.

d) Weisen Sie nach, dass der Scheitelpunkt S_c des Graphen der Funktion c der Mittelpunkt der Strecke zwischen den Scheitelpunkten S_a und S_b der Graphen der Funktionen a und b ist.

Klassenstufen 11–13

Die *Salinon* genannte Figur wird von vier Halbkreisbögen begrenzt (siehe Abbildung 1). Die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{DB}$ sind gleich lang.

Der Kreis k berührt die Halbkreise über $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ derart, dass die Verbindungsstrecke der Berührungspunkte ein Durchmesser von k ist, der auf der Strecke $\overline{AB}$ senkrecht steht.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Man beweise, dass das Salinon und der Kreis k flächengleich sind.

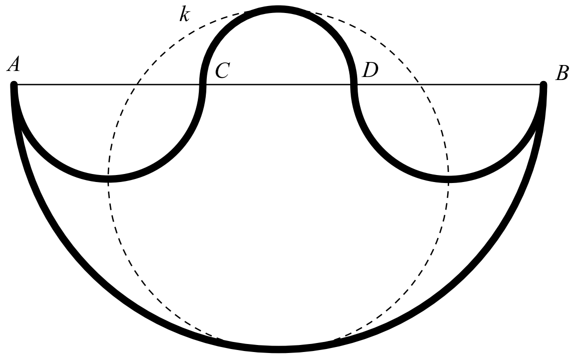


Abbildung 1