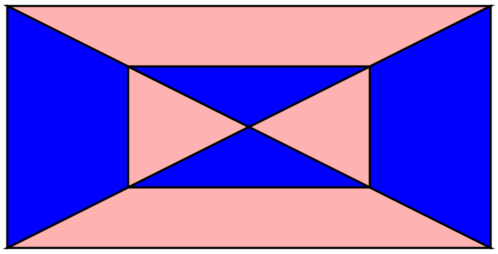
MO-Tage

Serie 14 – Lösungen

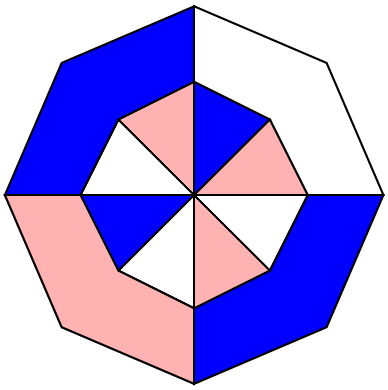
Klassenstufe 3

Teil a)



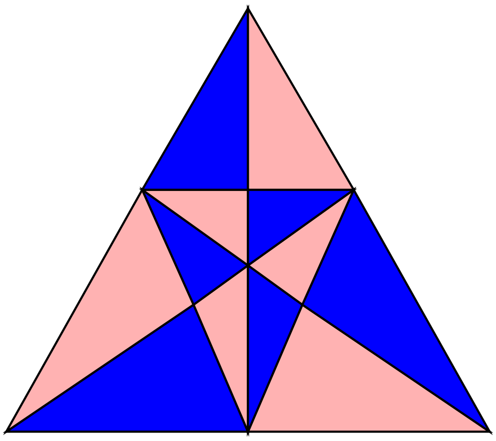
Anzahl der Farben: 2

Teil b)



Anzahl der Farben: 3

Teil c)



Anzahl der Farben: 2

Teil d) individuelle Lösungen möglich

Klassenstufe 4

a) Ein Würfel wurde nicht gefärbt.
b) Die 6 Würfel in den Flächenmitten des großen Würfels besitzen nur eine gefärbte Fläche.
c) 12 Würfel besitzen 2 gefärbte Flächen (Kanten).
d) Die Eckwürfel sind wie folgt gefärbt:

Beginnend mit schwarz und weiß:
schwarz, grün, rot
schwarz, rot, gelb
schwarz, gelb, blau
schwarz, grün, blau
weiß, rot, gelb
weiß, blau, gelb
weiß, grün, blau
weiß, grün, rot

Beginnend mit rot und blau:
rot, grün, schwarz
rot, gelb, schwarz
rot, gelb, weiß
rot, grün, weiß
blau, gelb, schwarz
blau, grün, schwarz
blau, gelb, weiß
blau, grün, weiß

Beginnend mit grün und gelb:
grün, rot, schwarz
grün, blau, schwarz
grün, rot, weiß
grün, blau, weiß
gelb, rot, schwarz
gelb, blau, schwarz
gelb, rot, weiß
gelb, blau, weiß

Klassenstufe 5

Teil a) Ein Schaltjahr hat 366 Tage, das sind 52 Wochen und zwei Tage. Jede Woche, also von Montag bis Sonntag, kocht Christoph $(3 \cdot 90 + 2 \cdot 140 =)$ 550 Knödel. Dies ändert sich natürlich nicht, wenn die Wochen von Sonntag bis Sonnabend gezählt werden.

In 52 Wochen macht das $(52 \cdot 550 =)$ 28 600 Knödel. Die letzten beiden Tage des Jahres sind ein Sonntag und ein Montag; am Montag ist das Restaurant geschlossen. Insgesamt muss Christoph somit $(28\,600 + 140 =)$ 28 740 Knödel kochen.

Teil b) Da Christoph pro Woche 550 Knödel kocht, fällt der 2012. Knödel in die vierte Woche. Nach drei Wochen sind es 1650 Knödel. Die vierte Woche ist in nachfolgender Tabelle aufgeführt:

Tag	Anzahl hinzukommender Knödel	Gesamtanzahl der Knödel
So, 22.01.2012	140	1790
Mo und Di	keine Knödel	1790
Mi, 25.01.2012	90	1880
Do, 26.01.2012	90	1970
Fr, 27.01.2012	90	**2060**

Folglich wurde der 2012. Knödel am Freitag, dem 27.01.2012 gekocht.

Klassenstufe 6

Teil a) Die Abbildung 1 zeigt das Anfangsquadrat, die vier Schnittlinien und das übrig gebliebene ($4\,\text{cm} \times 4\,\text{cm} =$) $16\,\text{cm}^2$ große Quadrat (grau).

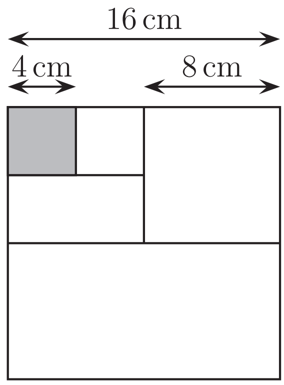


Abbildung 1

Nach jeweils zwei Schnitten von Bettina hat sich die Quadratseite halbiert, so dass die Seitenlänge des letzten Quadrates einem Viertel der Seitenlänge des ursprünglichen Quadrats entspricht.

Das letzte Quadrat hat eine Seitenlänge von 4 cm. Demnach hatte Bettinas Quadrat am Anfang eine Seitenlänge von ($4 \cdot 4 =$) 16 cm.

Teil b) Die Abbildung 2 zeigt das Anfangsquadrat, die vier Schnittlinien und das übrig gebliebene ($4\,\text{cm} \times 4\,\text{cm} =$) $16\,\text{cm}^2$ große Quadrat (grau).

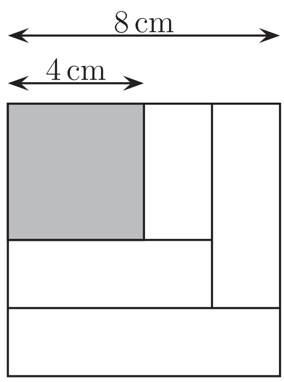


Abbildung 2

Überlegung:

Wenn man $\frac{1}{4}$ wegnimmt, dann bleiben noch $\frac{3}{4}$ übrig. Wenn man $\frac{1}{3}$ wegnimmt, dann bleiben noch $\frac{2}{3}$ übrig.

Nach den ersten beiden Schnitten von Luca ist die Quadratseite um $\frac{1}{4}$ gekürzt, sodass die Seitenlänge des Quadrates drei Viertel der Seitenlänge des ursprünglichen Quadrats entspricht.

Durch die letzten beiden Schnitte wird die Quadratseite um $\frac{1}{3}$ gekürzt, sodass von den drei Vierteln der ursprünglichen Quadratseite noch $\frac{2}{4}$ übrig bleiben.

Demnach hat Lucas ursprüngliches Quadrat eine Seitenlänge von $(2 \cdot 4 =)\,8\,\mathrm{cm}$ und einen Flächeninhalt von $64\,\mathrm{cm}^2$.

Klassenstufe 7

Es seien a, b und c die in dieser Reihenfolge gewürfelten drei Zahlen mit $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Führt man die Rechnung durch, zu der Elisabeth aufgefordert wurde, erhält man das Ergebnis z mit

$$z = \big((2a+5)\cdot 5 + b\big)\cdot 10 + c = (10a + 25 + b)\cdot 10 + c = 100a + 250 + 10b + c\,.$$

Daher gilt nach Aufgabenstellung $z - 250 = 100a + 10b + c$. Die Hunderterziffer von $z - 250$ ist a, also die erste gewürfelte Zahl, die Zehnerziffer b ist die zweite gewürfelte und die Einerziffer c ist die dritte gewürfelte Zahl.

Es gilt $885 - 250 = 635$. Daher sind die Zahlen 6, 3 und 5 in dieser Reihenfolge von Elisabeth gewürfelt worden.

Klassenstufe 8

Teil a) Für die Zeichnung siehe Abbildung 1 ohne die nicht verlangten Einträge.

Teil b) Durch Teilung der Seiten in drei kongruente Strecken und Verbinden der entsprechenden Punkte wird das Quadrat $ABCD$ in 9 zueinander kongruente Teilquadrate zerlegt, siehe Abbildung 1. Nach Voraussetzung ist der Punkt S dann der auf $\overline{CD}$ gelegene, zum Punkt C benachbarte Eckpunkt des Teilquadrates mit Eckpunkt C. Da sich die Diagonale $\overline{AC}$ aus den Diagonalen von drei kongruenten Teilquadraten zusammensetzt, ist nach Voraussetzung der Punkt R Eckpunkt des Teilquadrates mit dem Eckpunkt A.

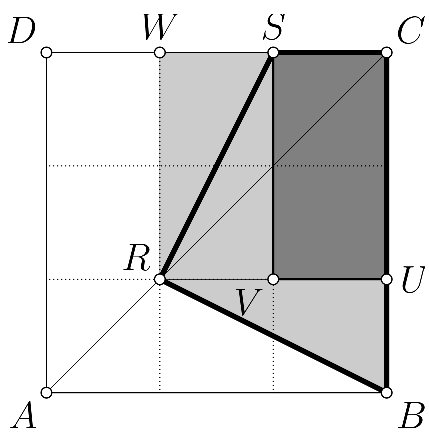


Abbildung 1

Wir bezeichnen mit V den dem Punkt B gegenüberliegenden Eckpunkt des Teilquadrates mit dem Eckpunkt B und mit U den zu B benachbarten, zwischen B und C gelegenen Eckpunkt dieses Teilquadrates.

Aus der Eigenschaft dieses Quadratrasters, aus $|AB| = 9\,\mathrm{cm}$ und den angegebenen Verhältnissen folgt

$$\begin{aligned} |\sphericalangle RUB| = |\sphericalangle SVR| &= 90^\circ\,, \\ |BU| = |RV| &= 3\,\mathrm{cm}\,, \\ |RU| = |SV| &= 6\,\mathrm{cm}\,. \end{aligned}$$

Daher sind die rechtwinkligen Dreiecke BUR und RVS nach dem Kongruenzsatz (sws) kongruent zueinander. Ihr Flächeninhalt ist jeweils $(6 \cdot 3\,\mathrm{cm}^2 : 2 =)\ 9\,\mathrm{cm}^2$.

Das Viereck $BCSR$ setzt sich zusammen aus dem Rechteck $CSVU$ mit dem Flächeninhalt $(3\,\mathrm{cm} \cdot 6\,\mathrm{cm} =)\ 18\,\mathrm{cm}^2$ und den beiden rechtwinkligen Dreiecken BUR und RVS. Das Viereck $BCSR$ hat folglich den Flächeninhalt $(18\,\mathrm{cm}^2 + 2 \cdot 9\,\mathrm{cm}^2 =)\ 36\,\mathrm{cm}^2$.

Teil c) Analog zu Teil a) folgt, dass auch die Dreiecke BUR und RSW zueinander kongruent sind. Da R, W und U Punkte des Quadratgitters sind, ist die Gerade RW senkrecht zur Geraden RU.

Folglich wird das Dreieck BUR durch eine Drehung um den Punkt R um den Winkel 90° in das Dreieck RSW überführt.

Bei dieser Drehung wird die Strecke $\overline{BR}$ in die Strecke $\overline{SR}$ überführt. Folglich gilt $|\sphericalangle BRS| = 90^\circ$.

Klassenstufe 9

Teil a) Es gilt zwar $\frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{6}{3} = 2$, aber

$$\frac{1}{1+\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+\frac{5}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} + \frac{1}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{9}{8} \neq \frac{4}{3}\,.$$

Also ist das Paar $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$ keine Lösung von Gleichung (2) und damit keine gemeinsame Lösung der Gleichungen (1) und (2).

Teil b) Eine gemeinsame Lösung beider Gleichungen ist zum Beispiel das Zahlenpaar $(2, 0)$, denn es gilt:

$$2 + 0 = 2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+0} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}\,.$$

Teil c) Bringt man die linke Seite von (2) auf einen gemeinsamen Nenner, ergibt sich

$$\frac{1+b}{(1+a)\cdot(1+b)} + \frac{1+a}{(1+a)\cdot(1+b)} = \frac{2+a+b}{(1+a)\cdot(1+b)} = \frac{4}{3}\,.$$

Einsetzen der ersten Gleichung $a+b=2$ im Zähler liefert

$$\frac{2+2}{(1+a)\cdot(1+b)} = \frac{4}{(1+a)\cdot(1+b)} = \frac{4}{3}$$

bzw.

$$(1+a)\cdot(1+b) = 1+a+b+a\cdot b = 3\,.$$

Einsetzen der ersten Gleichung und Vereinfachung führt auf $a\cdot b=0$.

Eine der Zahlen a und b muss also gleich 0 sein, die andere gleich 2, da auch $a+b=2$ gelten muss. Die einzig möglichen Lösungspaare sind daher $(0,2)$ und $(2,0)$. Eine Probe bestätigt, dass diese beiden Paare auch tatsächlich gemeinsame Lösungen der Gleichungen (1) und (2) sind.

Klassenstufe 10

Teil a) Die Funktion a hat die Nullstellen 2 und 6. Eine Probe mit beiden Möglichkeiten für $b(x)$ zeigt, dass $b(2) = -\frac{1}{6}\cdot 2^2 + \frac{8}{3}\cdot 2 - \frac{14}{3} = 0$ gilt. Also ist $x_1 = 2$ eine gemeinsame Nullstelle von $a(x)$ und $b(x)$.

Teil b) Der Ansatz $-\frac{1}{6}\,x^2 + \frac{8}{3}\,x - \frac{14}{3} = 0$ geht durch Multiplikation mit -6 äquivalent über in $x^2 - 16\,x + 28 = 0$ mit den beiden Lösungen $x_1 = 8 - \sqrt{64-28} = 2$ (bereits bekannt) und $x_2 = 8 + \sqrt{64-28} = 14$.

Die zweite Nullstelle kann auch nach dem Satz des Vieta über $2\cdot x_2 = 28$ oder über $2 + x_2 = -(-16)$ bestimmt werden.

Teil c) Die Senkrechte zur x-Achse durch den Scheitelpunkt S_c schneidet die x-Achse bei $x=6$ und ist Symmetrieachse des Graphen. Wenn $x_1 = 2 = 6-4$ eine Nullstelle ist, dann ist auch $x_2 = 6+4 = 10$ eine Nullstelle. Wir suchen also eine Funktion mit den Nullstellen 2 und 10, die an der Stelle $x=6$ den Funktionswert 7 besitzt.

Alle quadratischen Funktionen mit den Nullstellen 2 und 10 können durch

$$c(x) = k\cdot(x-2)\,(x-10)$$

dargestellt werden. Der Faktor k muss nun so gewählt werden, dass $c(6)=7$ gilt:

$$c(6) = 7 = k\cdot(6-2)(6-10) = k\cdot 4\cdot(-4) = -16\,k$$

ergibt $k = -\frac{7}{16}$. Die gesuchte Funktionsgleichung ist

$$c(x) = -\frac{7}{16} \cdot (x-2)\,(x-10)$$

oder (ausmultipliziert)

$$c(x) = -\frac{7}{16}\,x^2 + \frac{21}{4}\,x - \frac{35}{4}$$

oder (in Scheitelpunktform) $c(x) = -\frac{7}{16}(x-6)^2 + 7$.

Teil d) Da der Scheitelpunkt einer quadratischen Funktion auf deren Symmetrieachse liegt, ist die x-Koordinate des Scheitelpunkts das arithmetische Mittel der beiden Nullstellen dieser quadratischen Funktion. Der Scheitelpunkt des Graphen von a ist somit $S_a\left(\frac{6+2}{2},\, a\left(\frac{6+2}{2}\right)\right) = (4, 8)$ und der Scheitelpunkt des Graphen von b ist $S_b\left(\frac{14+2}{2},\, b\left(\frac{14+2}{2}\right)\right) = (8, 6)$. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{S_a S_b}$ hat dann die Koordinaten $x = \frac{4+8}{2} = 6$, $y = \frac{8+6}{2} = 7$ und ist somit der Punkt S_c.

Klassenstufen 11–13

Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ sei Q. Da $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ gleich lang sind, ist die Figur spiegelsymmetrisch zur Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$.

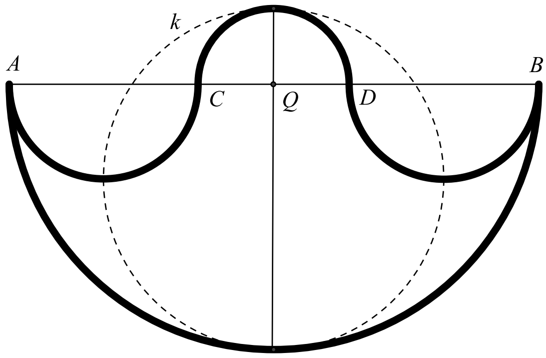


Abbildung 1

Die Halbkreise über $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ haben die Radien $\dfrac{1}{2}\,|AB|$ bzw. $\dfrac{1}{2}\,|CD|$. Die Halbkreise über $\overline{AC}$ und $\overline{DB}$ haben dann den Radius $\dfrac{1}{4}(|AB|-|CD|)$; der Radius des Kreises k beträgt $\dfrac{1}{4}(|AB|+|CD|)$.

Der Flächeninhalt des Salinons ergibt sich aus der Summe der Flächeninhalte der Halbkreise über $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ vermindert um die Flächeninhalte der Halbkreise über $\overline{AC}$ und $\overline{DB}$:

$$
\begin{aligned}
F_{\text{Salinon}} &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{|CD|}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{|AB|-|CD|}{4}\right)^2 \\
&= \frac{\pi}{8}\left(|AB|^2 + |CD|^2 - \frac{|AB|^2}{2} + |AB|\cdot|CD| - \frac{|CD|^2}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{8}\cdot\frac{1}{2}\left(|AB|^2 + 2\,|AB|\cdot|CD| + |CD|^2\right) \\
&= \frac{\pi}{16}\left(|AB| + |CD|\right)^2 \ .
\end{aligned}
$$

Für den Flächeninhalt des Kreises k gilt:

$$
\begin{aligned}
F_k &= \pi\ \left(\frac{|AB|+|CD|}{4}\right)^2 \\
&= \frac{\pi}{16}\left(|AB| + |CD|\right)^2 \ .
\end{aligned}
$$

Folglich ist $F_{\text{Salinon}} = F_k$.