BUNDESWEITE MATHEMATIK-WETTBEWERBE
Bildung & Begabung

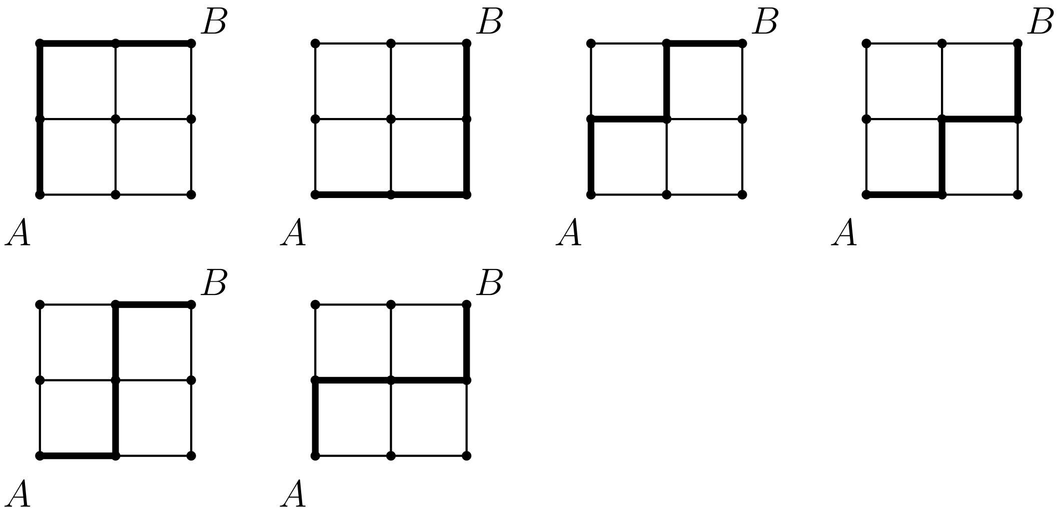
MO-Tage

Serie 15 – Lösungen

Klassenstufe 3

a) Die Ameise muss mindestens 4 m laufen.

b) Es gibt sechs verschiedene Wege, die alle 4 m lang sind.



c) Es gibt keinen 5 m langen Weg, solange die Ameise kein Teilstück zur Hälfte geht und dann umdreht. Da diese Möglichkeit in der Aufgabenstellung nicht ausgeschlossen wurde, sollten Kinder, die diese Lösung finden, einen Extrapunkt erhalten.

Klassenstufe 4

a) Eine mögliche Lösung:
   Der Bauer konnte einen Hahn, 30 Hennen und 5 Küken für seine 100 Geldstücke kaufen.

b) Die fünf Lösungen sind:

Anzahl Hähne	Anzahl Küken	Anzahl Hennen
1	2	31
4	8	24
7	14	17
10	20	10
13	26	3

Klassenstufe 5

Aus (5) folgt:

(1*) Der Lehrer ist jünger oder gleich 42 Jahre alt.
(2*) Die Quersumme seines Alters ist zweistellig, also größer oder gleich 10.
(3*) Die Einerstelle ist gerade.
(4*) Die Zehnerstelle ist ungerade.

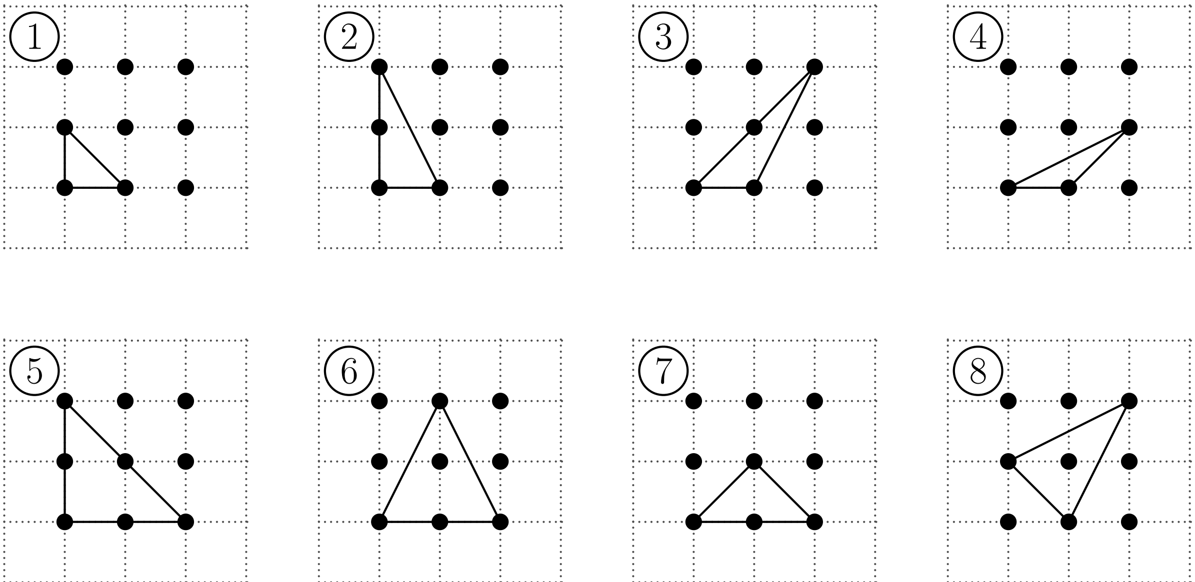
Aus (2*) folgt, dass der Lehrer mindestens 19 Jahre alt ist. Dann folgt aus (1*), (3*) und (4*), dass der Lehrer folgende Alterswerte haben kann: 30, 32, 34, 36 oder 38.

Aus (2*) folgt weiter, dass nur das Alter von 38 in Frage kommt, denn 38 hat als einzige dieser möglichen Alterswerte eine Quersumme, die größer als 9 ist: Die Quersumme von 38 ist 11.

Der Mathematiklehrer ist also 38 Jahre alt.

Klassenstufe 6

Teil a) Es gibt 8 verschieden geformte Dreiecke:



Teil b)

Dreieck	1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl	16	16	8	16	4	4	8	4

Teil c) Die gesamte, von den 9 Nägeln gebildete Figur hat einen Flächeninhalt von $4\,\mathrm{cm}^2$.

Es ergibt sich für die Dreiecke 1, 2 und 5 unmittelbar $A_1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$, $A_2 = 1\,\mathrm{cm}^2$ und $A_5 = 2\,\mathrm{cm}^2$, indem Quadrate oder Rechtecke halbiert werden.

Die Fläche von Dreieck 3 ist die Differenz aus A_5 und A_2 und damit ist $A_3 = 1\,\mathrm{cm}^2$.

Die Fläche von Dreieck 4 ist die Differenz aus A_2 und A_1 und damit ist $A_4 = \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$.

Die Fläche A_6 ist das Doppelte von A_2 und somit $A_6 = 2\,\mathrm{cm}^2$, entsprechend ist $A_7 = 2 \cdot A_1 = 1\,\mathrm{cm}^2$.

Das Dreieck 8 ergibt sich durch Wegnahme von zweimal A_2 und einmal A_1 vom großen Quadrat und damit ist $A_8 = 1{,}5\,\mathrm{cm}^2$.

Damit erhält man die Reihenfolge von $A_1 = A_4 < A_2 = A_3 = A_7 < A_8 < A_5 = A_6$.

Klassenstufe 7

Für den Gewinn von Laura ist nach den Regeln des Spieles entscheidend, ob bei allen Möglichkeiten, wie Laura die Enden der Fäden der Reihe nach verknüpfen kann, mehrheitlich ein einziger Ring entsteht. Durch das Verknüpfen der Fäden auf einer Seite der Faust entstehen in jedem Fall Doppelfäden, welche aus je zwei an je einem Ende verknüpften Fäden bestehen. Entscheidend dafür, ob ein einziger Ring entsteht, ist nun nur, wie diese Doppelfäden auf der anderen Seite der Faust miteinander verbunden werden.

Teil a) Da es vier Fäden sind, erzeugt Laura durch das Verknüpfen der Fäden auf einer Seite der Faust genau zwei Doppelfäden.

Laura kann auf der anderen Seite der Faust ein beliebiges Doppelfadenende wählen.

Wählt sie von den drei noch freien Enden gerade das Ende aus, welches zu dem Doppelfaden gehört, dessen eines Ende sie zuvor ausgewählt hatte, so entsteht aus diesem Doppelfaden ein Ring und danach durch das Verknüpfen der anderen beiden Enden ein zweiter Ring.

Wählt sie hingegen von den drei noch freien Enden eines der beiden Enden des anderen Doppelfadens aus, so entsteht ein Viererfaden und danach durch das Verknüpfen der noch freien Enden ein einziger Ring.

In $\frac{2}{3}$ der Fälle erhält sie also einen einzigen Ring.

Laura hat eine größere Gewinnchance als Eva, da sie in $\frac{2}{3}$ der Fälle und Eva nur in $\frac{1}{3}$ aller Fälle das Spiel gewinnt.

Teil b) Da es sechs Fäden sind, erzeugt Laura durch das Verknüpfen der Fäden auf einer Seite der Faust genau drei Doppelfäden.

Im ersten Schritt kann Laura ein beliebiges Doppelfadenende wählen. Um am Ende einen einzigen Ring zu erhalten, darf sie von den 5 verbliebenen Doppelfadenenden nicht dasjenige wählen, welches zum gleichen Doppelfaden gehört, da sonst ein Ring aus nur zwei Fäden entsteht. Sie hat daher hierfür 4 Möglichkeiten. In $\frac{4}{5}$ der Fälle hat sie also nach dem ersten Schritt noch die Möglichkeit, einen einzigen Ring zu erhalten. Entstanden sind dann ein Viererfaden aus zwei an je einem Ende verknüpften Doppelfäden und ein Doppelfaden.

Im zweiten Schritt hat Laura nun 4 Fadenenden vor sich. Sie wählt zwei Fadenenden aus und verbindet diese. Es verbleiben zwei Fadenenden, die ebenfalls verbunden werden. In der Hälfte der Fälle hat sie als erstes Fadenende ein Ende des Viererfadens, in der anderen Hälfte ein Ende des Doppelfadens gewählt. Wenn sie ein Ende des Viererfadens gewählt hat, muss sie dann ein Ende des Doppelfadens gewählt haben, um einen einzigen Ring zu erhalten. Da es 3 freie Enden sind, von denen 2 die Enden des Doppelfadens sind, gelingt dies in $\frac{2}{3}$ der Fälle. Wenn sie ein Ende des Doppelfadens gewählt hat, muss sie dann ein Ende des Viererfadens wählen, um einen einzigen Ring zu erhalten. Da es auch 3 freie Enden sind, von denen nun 2 die Enden des Viererfadens sind, gelingt dies ebenfalls in $\frac{2}{3}$ der Fälle. Insgesamt erhält Laura in $\frac{2}{3}$ der Fälle einen einzigen Ring.

Da Laura nach dem ersten Schritt noch in $\frac{4}{5}$ der Fälle die Möglichkeit hat, zu einem einzigen Ring zu kommen, und im zweiten Schritt davon in $\frac{2}{3}$ der Fälle auch diese Möglichkeit realisiert wird, erhält sie in $(\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} =)$ $\frac{8}{15}$ der Fälle tatsächlich einen einzigen Ring.

Laura hat eine größere Gewinnchance als Eva, da sie in $\frac{8}{15}$ der Fälle und Eva nur in $\frac{7}{15}$ aller Fälle das Spiel gewinnt.

Klassenstufe 8

I. Wenn die Zahl z die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, dann gilt:

Es gibt positive ganze Zahlen a, b und c mit

$$z = a \cdot 10\,000 + b \cdot 100 + c\,, \tag{1}$$

$$a, b, c \in \{1, 2, 3, \ldots, 99\}\,, \tag{2}$$

$$a : b : c = 1 : 2 : 3 \tag{3}$$

und

$$72 \mid z\,. \tag{4}$$

Aus (3) folgt

$$c = 3 \cdot a\,, \quad b = 2 \cdot a\,. \tag{5}$$

Aus (1) und (5) folgt

$$z = 10\,203 \cdot a\,. \tag{6}$$

Wegen $72 = 8 \cdot 9$ und wegen Bedingung (4) muss z durch 8 und 9 teilbar sein. Wegen (6) und da 10 203 nicht durch 8 teilbar ist, muss a durch 8 teilbar sein. Wegen (6) und da 10 203 zwar durch 3, aber nicht durch 9 teilbar ist, muss a durch 3 teilbar sein. Da 3 und 8 zueinander teilerfremd sind, muss a folglich durch $(3 \cdot 8 =)$ 24 teilbar sein. Wegen $c = 3 \cdot a$ und (2) folgt $a = 24$. Hieraus und wegen (5) folgt $b = 48$ und $c = 72$.

Wenn es eine Zahl gibt, welche die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, dann kann dies also nur 244 872 sein.

II. Die Zahl 244 872 ist eine sechsstellige natürliche Zahl, welche wegen $244\,872 : 72 = 3\,401$ tatsächlich durch 72 teilbar ist. Die durch Trennen nach der zweiten und vierten Ziffer entstehenden Zahlen sind 24, 48 und 72. Sie verhalten sich tatsächlich wie $1 : 2 : 3$.

Aus I. und II. folgt, dass 244 872 die einzige Zahl ist, welche die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Klassenstufe 9

Teil a) Es gilt $|x| = x$ für $x \geq 0$ und $|x| = -x$ für $x < 0$. Somit lässt sich a für $x < 0$ durch die lineare Funktion $a_1(x) = 2\,x + 11$ und für $x \geq 0$ durch die lineare Funktion $a_2(x) = -2\,x + 11$ beschreiben. Ebenso lässt sich b abschnittweise definieren als $b_1(x) = -\frac{1}{2}\,(x-7)$ für $x < 7$ bzw. als $b_2(x) = \frac{1}{2}\,(x-7)$ für $x \geq 7$. Diese Erkenntnis oder die Verwendung entsprechender Wertetabellen ermöglichen die Darstellung der Graphen entsprechend der Abbildung 1.

Hinweis: Auf den meisten Taschenrechnern kann man z. B. die Funktion a direkt in der Form `-2*abs(x)+11` eingeben.

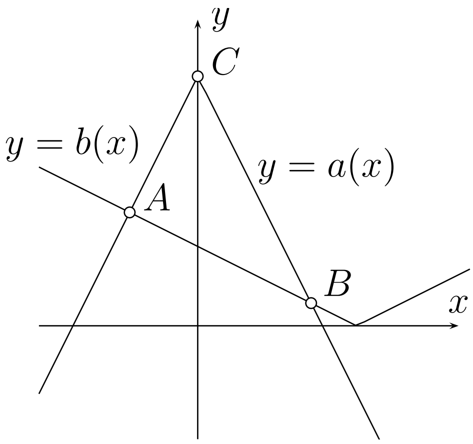


Abbildung 1

Teil b) Zunächst wird bestimmt, in welchem Intervall die x-Koordinaten möglicher Schnittpunkte von a und b nicht liegen können.

Für $x \geq 7$ gilt: $a(x) = -2\,x + 11 \leq -3$ und $b(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-7) \geq 0$. Im betrachteten Intervall kann es also keine Schnittpunkte geben.

Wenn es Schnittpunkte gibt, dann liegen sie auf dem Teil des Graphen von b, der durch $b_1(x) = -\frac{1}{2}\,(x-7)$ für $x < 7$ beschrieben wird. Zur Bestimmung von Schnittpunktskoordinaten werden zwei Gleichungssysteme gelöst, indem die

Funktionsgleichungen von b_1 und a_1 bzw. von b_1 und a_2 betrachtet werden. Bei sich ergebenden Lösungen ist zu prüfen, ob die Bedingung $x < 7$ für die x-Koordinate erfüllt ist und ob die jeweilige Lösung zum entsprechenden Definitionsbereich von a_1 bzw. a_2 passt. Die Gleichungssysteme

$$y = 2\,x + 11 \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{2}\,(x - 7) \tag{1}$$

bzw.

$$y = -2\,x + 11 \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{2}\,(x - 7) \tag{2}$$

ergeben jeweils genau eine Lösung: aus (1) folgt $x = -3$, $y = 5$ und der zugehörige Punkt $A(-3, 5)$ bzw. aus (2) folgt $x = 5$, $y = 1$ mit $B(5, 1)$. Die x-Koordinaten von A und B sind beide kleiner als sieben und haben das passende Vorzeichen. A und B sind daher die gesuchten Schnittpunkte der Graphen von a und b.

Teil c) Haben zwei sich schneidende Geraden die Anstiege m_1 und m_2, dann stehen sie genau dann senkrecht aufeinander, wenn $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ gilt. Die Anstiege von a_1 und b_1 erfüllen mit ihren Werten 2 und $-\frac{1}{2}$ diese Bedingung. Also ist der Innenwinkel des Dreiecks ABC bei A ein rechter Winkel.

Klassenstufe 10

Teil a) Nimmt ein Mann an einem Tisch Platz, so ist der Platz seiner Frau festgelegt.

Der Bräutigam nimmt am großen Tisch Platz. Für seine Platzwahl gibt es 8 Möglichkeiten. Dann setzt sich seine Frau, sie hat genau eine Möglichkeit. Rechts neben ihr muss ein anderer Mann sitzen. Da noch 6 Männer zur Verfügung stehen, gibt es für die Auswahl dieses Mannes 6 Möglichkeiten. Seine Frau nimmt rechts neben ihm Platz. Analog erfolgt die Vergabe des Platzes rechts neben dieser Frau, dafür gibt es nun 5 Möglichkeiten. Für die Auswahl des vierten Mannes, welcher an diesem Tisch Platz nimmt, gibt es 4 Möglichkeiten. Der Stuhl dieses Mannes ist festgelegt, da bereits 3 Paare an diesem Tisch sitzen. Somit gibt es für die Belegung der Stühle am großen Tisch $8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 960$ Möglichkeiten. Allerdings sind immer jeweils 8 dieser Anordnungen gemäß der Aufgabenstellung identisch. Es gibt demnach $\frac{960}{8} = 120$ mögliche Sitzordnungen am großen Tisch.

Der nächste der drei verbliebenen Männer nimmt nun am kleinen Tisch Platz (er hat sechs Möglichkeiten) und analog zur Belegung der Plätze am großen Tisch nehmen die restlichen Personen Platz. Am kleinen Tisch gibt es $\frac{6 \cdot 2 \cdot 1}{6} = 2$ mögliche Sitzordnungen.

Damit gibt es $120 \cdot 2 = 240$ verschiedene Sitzordnungen.

Teil b) Die erste Person, die Platz nimmt, hat 14 Möglichkeiten, die zweite 13 usw. Da am großen Tisch wieder jeweils 8 und am kleinen Tisch jeweils 6 Anordnungen gemäß der Aufgabenstellung identisch sind, kann man die Zahl der Möglichkeiten wie folgt berechnen:

$$\frac{14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 6} = \frac{14!}{48} = 1\,816\,214\,400.$$

Klassenstufen 11–13

Zunächst berechnen wir die Wahrscheinlichkeit, mit der Amelie bei einem Wurf ein höheres Ergebnis erzielt als Bruno. Dafür wird die Anzahl der erfolgreichen Kombinationen bestimmt.

Mit den Augenzahlen 13 bis 20 gewinnt Amelie immer. Bei den Augenzahlen 1 bis 12 gibt es entsprechend $0, 1, \ldots, 11$ Möglichkeiten, bei denen Amelie den höheren Wurf hat. Zusammen sind dies $8 \cdot 12 + 0 + 1 + \cdots + 11 = 8 \cdot 12 + \frac{11 \cdot 12}{2} = 162$ Kombinationen, bei denen Amelie vorn liegt. Da es insgesamt $20 \cdot 12 = 240$ Kombinationen gibt, beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{162}{240} = \frac{27}{40}$.

Wir bestimmen nun die Gewinnchance für Amelie insgesamt. Zum einen gibt es die Möglichkeit, dass sie alle vier Würfe für sich entscheidet. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $\left(\frac{27}{40}\right)^4 = \frac{531\,441}{2\,560\,000}$. Zum anderen gibt es die Möglichkeit, dass sie bei genau drei der vier Würfe vorn liegt.

Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $4 \cdot \left(\frac{27}{40}\right)^3 \cdot \frac{13}{40} = \frac{1\,023\,516}{2\,560\,000}$.

Damit liegt die Gewinnchance von Amelie bei $\frac{1\,554\,957}{2\,560\,000} = 0{,}607\,405\,078\,125$, also bei rund 60,7 Prozent. Sie hat die größere Gewinnchance.

Bemerkung: Solche Würfel gibt es tatsächlich. Sie finden unter anderem bei so genannten Pen-&-Paper-Rollenspielen unter den Namen W20 und W12 Verwendung.