Serie 16 – Lösungen

Klassenstufe 3

Teil a) $3100\,\mathrm{m}$

Teil b) $2,8\,\mathrm{km} + 1,65\,\mathrm{km} = 4,45\,\mathrm{km}$

Teil c) $4,45\,\mathrm{km} = 4450\,\mathrm{m}$

Teil d) $\overline{DAB} = 1650\,\mathrm{m} + 2800\,\mathrm{m} = 4450\,\mathrm{m}$

$\overline{DCB} = 2150\,\mathrm{m} + 1200\,\mathrm{m} = 3350\,\mathrm{m}$

Der Weg von D über C nach B ist der kürzeste.

Klassenstufe 4

Da die Summe in der 2. Spalte 11 beträgt, kommen für das Symbol $\oplus$ nur $1, 2$ oder 3 in Frage. Die weiteren Werte ergeben sich dann aus folgender Tabelle, wenn man die Summen in Zeile 1 und Spalte 2 verwendet:

$\oplus$	$\ast$	$\blacklozenge$
1	4	8
2	3	5
3	2	2

Für $\oplus = 1$ und $\oplus = 3$ ergibt sich aber ein Widerspruch in der 2. Zeile.

Man erhält die Lösung:

$\ast_3$	$\oplus_2$	$\oplus_2$	$\ast_3$	10
$\blacklozenge_5$	$\blacklozenge_5$	$\ast_3$	$\oplus_2$	15
$\ast_3$	$\oplus_2$	$\blacklozenge_5$	$\ast_3$	13
$\ast_3$	$\oplus_2$	$\ast_3$	$\blacklozenge_5$	
	11		**13**	

$\oplus = 2$

$\blacklozenge = 5$

$\ast = 3$

Klassenstufe 5

Teil a) An den Stationen finden bis 9:30 Uhr folgende Veränderungen der Schüleranzahl statt:

Wissensquiz	$8 - 4 \quad\quad + 2 - 3 = 3$
Knobelecke	$8 + 4 - 3 \quad\quad\quad = 9$
Bastelstand	$8 \quad\quad + 3 - 2 + 3 = 12$

Um 9:30 Uhr sind beim Wissensquiz 3 Schüler, in der Knobelecke 9 Schüler und am Bastelstand 12 Schüler.

Teil b) Da sich laut Aufgabe die Affen gleichmäßig auf die drei Plätze verteilen können, muss die Anzahl der Tiere eine durch 3 teilbare Zahl sein. Die einzige durch 3 teilbare Zahl zwischen 30 und 35 ist 33. Folglich wären am Schluss an jedem der drei Plätze (33 : 3 =) 11 Affen. Die anfängliche Verteilung erhält man durch Rückwärts-Arbeiten:

Veränderungen rückwärts betrachtet	Seile	Bäume	Futter	Gesamt
	11	11	11	33
2 Affen von Seilen zu Bäumen	9	13	11	33
5 Affen von Bäumen zum Futter	9	8	16	33
1 Affe von Seilen zum Futter	8	8	17	33
3 Affen vom Futter zu Bäumen	8	11	14	33
1 Affe von Bäumen zu Seilen	9	10	14	33

Damit waren zu Beginn 9 Affen auf den Seilen, 10 Affen auf Bäumen und 14 an der Futterstelle.

Klassenstufe 6

Teil a) Wir berechnen zunächst die Seitenlängen der verschieden großen Quadrate (siehe Abbildung 1).

Wenn wir ein Quadrat mit der Seitenlänge n cm mit $Q(n)$ bezeichnen, dann gilt:

Es gibt ein $Q(18)$, vier $Q(12)$, neun $Q(6)$, vier $Q(4)$ und neun $Q(2)$.

Folglich gibt es genau $(1 + 4 + 9 + 4 + 9 =)$ 27 Quadrate.

Teil b) Das grau markierte Quadrat ist eines der neun $Q(2)$.

Folglich hat es einen Flächeninhalt von $(2\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm} =)\ 4\,\text{cm}^2$ und einen Umfang von $(4 \cdot 2\,\text{cm} =)\ 8\,\text{cm}$.

Teil c) Wir berechnen zunächst die Basislängen der verschieden großen gleichschenkligen Dreiecke (siehe Abbildung 2).

Wenn wir ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basislänge von n cm mit $D(n)$ bezeichnen, dann gilt:

Es gibt ein $D(12)$, vier $D(6)$ und vier $D(3)$.

Folglich gibt es genau $(1 + 4 + 4 =)$ 9 gleichschenklige Dreiecke.

Teil d) Das gegebene Rechteck hat einen Flächeninhalt von
$(12\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} =)\ 96\,\text{cm}^2$.

Das Dreieck $D(12)$ ist halb so groß wie das Rechteck. (*)

Folglich hat $D(12)$ einen Flächeninhalt von $(96\,\text{cm}^2 : 2 =)\ 48\,\text{cm}^2$.

Wir zerlegen das Dreieck $D(12)$ durch Hilfslinien in $(1+3+5+7 =)$ 16 Dreiecke $D(3)$ (siehe Abbildung 2).

Da das grau markierte Dreieck ein $D(3)$ ist, beträgt sein Flächeninhalt
$(48\,\text{cm}^2 : 16 =)\ 3\,\text{cm}^2$.

Herleitung von (*):

Das gegebene Rechteck wird durch seine senkrechte Symmetrieachse in zwei inhaltsgleiche Rechtecke zerlegt, wobei die Schenkel des Dreiecks $D(12)$ deren Diagonalen sind.

Da eine Diagonale eines Rechtecks dieses in zwei inhaltsgleiche Dreiecke zerlegt, folgt hieraus, dass das Dreieck $D(12)$ halb so groß ist wie das gegebene Rechteck.

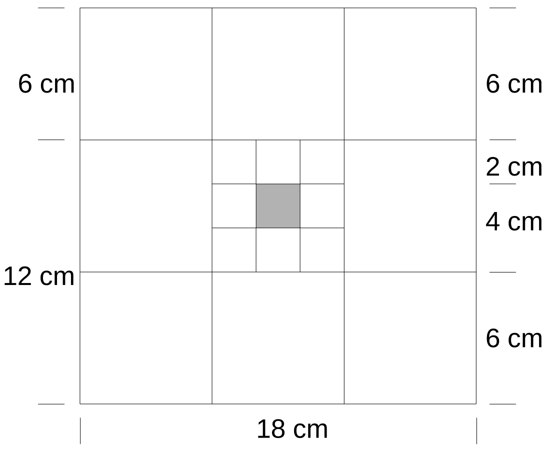


Abbildung 1

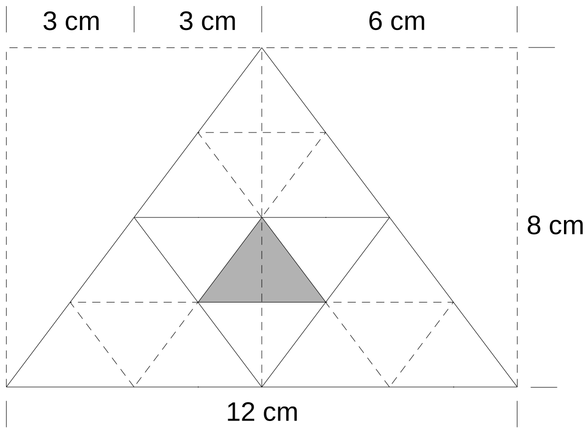


Abbildung 2

Klassenstufe 7

Teil a) Wegen (2) ist das Dreieck ABG gleichschenklig mit der Basis $\overline{AB}$. Nach dem Basiswinkelsatz sind die Winkel GBA und BAG gleich groß. Wegen (3) und nach dem Nebenwinkelsatz und dem Innenwinkelsatz folgt $2 \cdot \beta + 90° = 180°$ und daher $\beta = 45°$.

Teil b) Wegen (3) und nach dem Nebenwinkelsatz hat das Dreieck ABG die Höhe $\overline{AG}$ zur Grundseite $\overline{BG}$. Nach der Flächeninhaltsformel und wegen (2) gilt für den Flächeninhalt A_{ABG} des Dreiecks ABG daher

$$\mathrm{A}_{ABG} = \frac{1}{2} \cdot |BG| \cdot |AG| = \frac{1}{2} \cdot 12\,\mathrm{cm} \cdot 12\,\mathrm{cm} = 72\,\mathrm{cm}^2\,.$$

Wegen (1) und (4) gilt für den Flächeninhalt A_{ABC} des Dreiecks ABC die Gleichung

$$\mathrm{A}_{ABC} = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \mathrm{A}_{ABG}\,,$$

woraus $\mathrm{A}_{ABC} = 90\,\mathrm{cm}^2$ folgt.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist also $90\,\mathrm{cm}^2$.

Teil c) Wegen (3) ist CGA ein rechter Winkel. Daher ist $\overline{AG}$ eine Höhe zur Grundseite $\overline{CG}$ des Dreiecks AGC. Nach der Flächeninhaltsformel gilt daher

$$\mathrm{A}_{AGC} = \frac{1}{2} \cdot |CG| \cdot |AG|\,.$$

Wegen (1) und (4) gilt $\mathrm{A}_{AGC} = \frac{1}{5} \cdot \mathrm{A}_{ABC} = \frac{1}{5} \cdot 90\,\mathrm{cm}^2 = 18\,\mathrm{cm}^2$. Wegen (2) folgt daher

$$|CG| = \frac{2 \cdot \mathrm{A}_{AGC}}{|AG|} = \frac{2 \cdot 18\,\mathrm{cm}^2}{12\,\mathrm{cm}} = 3\,\mathrm{cm}\,.$$

Die Strecke $\overline{CG}$ ist also 3 cm lang.

Teil d) Wegen (4) haben die Dreiecke DEF und BFE gleich große Flächeninhalte. Wegen (1) ist das Lot vom Punkt F auf die Gerade AB eine gemeinsame Höhe der Dreiecke DEF und BFE. Nach der Flächeninhaltsformel folgt aus gleich großen Flächeninhalten und gleichen Höhenlängen, dass die zugehörigen Grundseiten, also die Strecken $\overline{DE}$ und $\overline{BE}$, gleich lang sind.

Klassenstufe 8

Teil a) Nach den Aussagen (3), (4) und (5) muss die Anzahl der Kugeln durch 3, 4 und 5, also durch $(3 \cdot 4 \cdot 5 =)$ 60 teilbar sein. Nach (7) sind es weniger als $(7 \cdot 20 =)$ 140 Kugeln. Es können daher nur genau 60 oder genau 120 Kugeln sein.

Angenommen, es sind 60 Kugeln. Wegen (3) sind dann genau 20 Kugeln zu einem Teil blau. Wegen (4) gibt es genau 15 blau-weiße Kugeln. Wegen (5) gibt es genau 12 rot-grüne Kugeln. Wegen (6) gibt es genau 2 rot-blaue Kugeln.

Da es insgesamt genau 20 Kugeln sind, die zu einem Teil blau sind, darunter genau 15 blau-weiße und genau 2 rot-blaue Kugeln, müssen es genau 3 blau-grüne Kugeln sein. Dies widerspricht der Aussage (2).

Folglich können es nicht 60 Kugeln sein. Es müssen also 120 Kugeln sein.

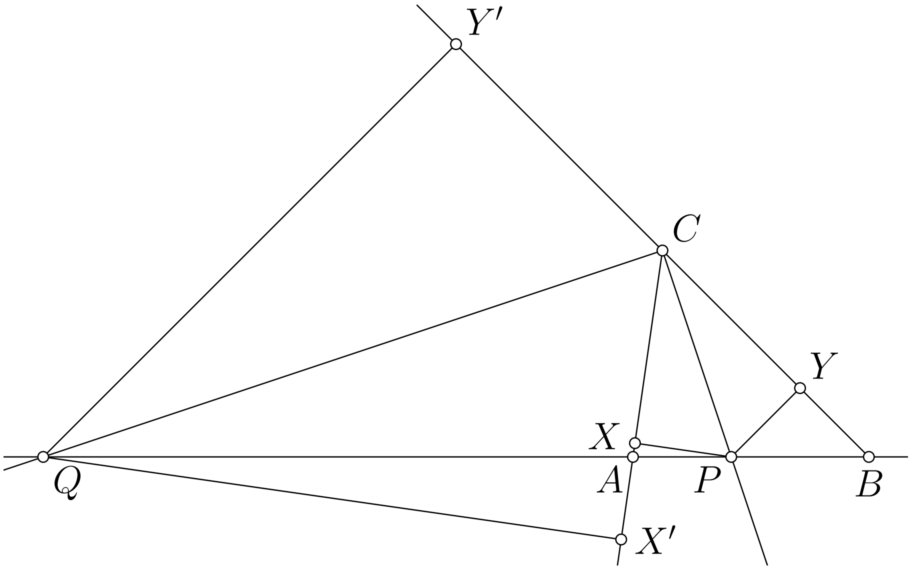
Teil b) Wegen (3) sind genau 40 Kugeln zu einem Teil blau. Wegen (4) gibt es genau 30 blau-weiße Kugeln. Wegen (5) gibt es genau 24 rot-grüne Kugeln. Wegen (6) gibt es genau 4 rot-blaue Kugeln.

Da es insgesamt genau 40 Kugeln sind, die zu einem Teil blau sind, darunter genau 30 blau-weiße und genau 4 rot-blaue Kugeln, sind es genau 6 blau-grüne Kugeln.

Da unter den 120 Kugeln genau 6 blau-grüne Kugeln sind, ist ihr Anteil $(\frac{6}{120} =)$ 0,05, also 5 %.

Teil c) Der Anteil der Anzahl 6 der blau-grünen Kugeln an der Anzahl 40 der Kugeln, die zu einem Teil blau sind, ist $(\frac{6}{40} =)$ 0,15, also 15 %.

Klassenstufe 9



Teil a) Die Dreiecke PCX und PCY haben die Winkelhalbierende $\overline{PC}$ als gemeinsame Seite und stimmen in der Größe der Innenwinkel bei C sowie der rechten Winkel überein. Daher sind auch die Innenwinkel bei P gleich groß. Die beiden Dreiecke sind also nach dem Kongruenzsatz (wsw) kongruent mit $|PX| = |PY|$. Die Summe aus Winkel und Nebenwinkel beträgt 180°. Halber Winkel und halber Nebenwinkel ergeben also 90°. Folglich müssen die Halbierenden von Winkel und zugehörigem Nebenwinkel aufeinander senkrecht stehen, also gilt $|\sphericalangle QCP| = 90°$.

Teil b) Die Teildreiecke APC und PBC haben eine gemeinsame von C ausgehende Höhe. Das Verhältnis der Flächeninhalte wird also allein durch das Verhältnis der zugehörigen Grundseiten $\overline{AP}$ und $\overline{PB}$ bestimmt und stimmt mit diesem überein.

Teil c) Das Verhältnis der Flächeninhalte der Teildreiecke APC und PBC kann auch bestimmt werden, indem man die Strecken $\overline{AC}$ bzw. $\overline{CB}$ als Grundseiten und die nach a) gleich langen Strecken $\overline{PX}$ bzw. $\overline{PY}$ als Höhen betrachtet. Analog zu b) erhält man als Flächeninhaltsverhältnis $|AC| : |CB|$, mit b) also $|AC| : |CB| = |AP| : |PB|$.

Teil d) Es seien X' und Y' die Fußpunkte der Lote von Q auf AC bzw. BC. Analog zu a) zeigt man, dass $\triangle QCX'$ und $\triangle QCY'$ die Winkelhalbierende $\overline{QC}$ als gemeinsame Seite haben und in der Größe der Innenwinkel bei Q und C übereinstimmen, also kongruent sind mit $|QX'| = |QY'|$. Da $\triangle QAC$ und $\triangle QBC$

die von C ausgehende Höhe gemeinsam haben, folgt daraus

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AC| \cdot |QX'|}{|BC| \cdot |QY'|} = \frac{\mathrm{A}_{QAC}}{\mathrm{A}_{QBC}} = \frac{|AQ|}{|QB|},$$

wobei A_{UVW} den Flächeninhalt von $\triangle\, UVW$ bezeichnet.

Klassenstufe 10

Teil a) Der gestreckte Winkel bei M besteht aus drei Teilwinkeln. Da die Dreiecke AME und MBF aus Symmetriegründen kongruent und beide gleichschenklig mit der Spitze bei M sind, gilt $|\sphericalangle BMF| = |\sphericalangle EMA| = \frac{1}{2}(180° - \varepsilon)$. Das Dreieck MBE ist ebenfalls gleichschenklig mit der Spitze M und somit folgt mit dem Außenwinkelsatz

$$2\,|\sphericalangle MEB| = |\sphericalangle EMA|\,, \text{ also } |\sphericalangle MEB| = \frac{1}{4}(180° - \varepsilon) = 45° - \tfrac{\varepsilon}{4}\,.$$

Zum Schluss betrachtet man den Winkelsummensatz im Dreieck MSE und es folgt

$$\delta = |\sphericalangle ESM| = 180° - \left(\varepsilon + 45° - \tfrac{\varepsilon}{4}\right) = 135° - \tfrac{3}{4}\,\varepsilon\,.$$

Teil b) Nach Voraussetzung gilt $|AD| = \frac{\sqrt{2}}{3}\,|AB|$. Nach dem Satz des Thales ist das Dreieck ABE rechtwinklig. Da die Strecke $\overline{DE}$ kongruent zum an der Kathete $\overline{AE}$ anliegenden Hypotenusenabschnitt ist, folgt nach dem Kathetensatz

$$|AE|^2 = |DE| \cdot |AB|\ .$$

Im rechtwinkligen Dreieck AED gilt mit dem Satz des Pythagoras und der Voraussetzung

$$|AE|^2 = |DE|^2 + |AD|^2 = |DE|^2 + \frac{2}{9}\,|AB|^2\ .$$

Gleichsetzen ergibt

$$|DE| \cdot |AB| = |DE|^2 + \frac{2}{9}\,|AB|^2$$

und folglich

$$|DE|^2 - |DE| \cdot |AB| + \frac{2}{9}\,|AB|^2 = 0\,.$$

Die beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung mit der Unbekannten $|DE|$ sind

$$|DE| = \frac{1}{3}\,|AB| \quad \text{oder} \quad |DE| = \frac{2}{3}\,|AB|\ .$$

Aus Symmetriegründen sind $\overline{DE}$ und $\overline{FC}$ gleich lang und wegen der gegebenen Reihenfolge von E und F auf $\overline{DC}$ sind beide kürzer als $\frac{1}{2}|AB|$. Daher folgt $\frac{1}{3}|AB| = |DE| = |FC| = |EF|$, was zu beweisen war.

Klassenstufen 11–13

Die k-te der in der Aufgabenstellung angegebenen Zahlen besitzt die Form

$$E(k) = 1 + 10^3 + \cdots + 10^{3(k-1)}\,.$$

Wir beobachten zunächst

$$\begin{aligned} 999 \cdot E(k) &= (10^3 - 1)(1 + 10^3 + \cdots + 10^{3(k-1)}) \\ &= (10^3 + \cdots + 10^{3(k-1)} + 10^{3k}) - (1 + 10^3 + \cdots + 10^{3(k-1)}) \\ &= 10^{3k} - 1\,. \end{aligned}$$

Nehmen wir nun an, für eine ganze Zahl $k \geq 2$ wäre $E(k)$ eine Primzahl. Aus $999 = 3^3 \cdot 37$ würde dann folgen, dass

$$10^{3k} - 1 = 3^3 \cdot 37 \cdot E(k)$$

eine Zerlegung in Primfaktoren ist. Andererseits gilt aber auch

$$10^{3k} - 1 = (10^k - 1)(10^{2k} + 10^k + 1)\,.$$

Da $E(k)$ in einem der beiden Faktoren enthalten sein muss, kann der andere nicht größer als 999 sein. Der kleinere Faktor $10^k - 1$ muss deshalb in jedem Falle kleiner oder gleich 999 sein und damit folgt $k \leq 3$.

Nun liefern aber die Fälle $k = 2, 3$ mit $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ und $1001001 = 3 \cdot 333\,667$ keine Primzahlen. Damit entsteht ein Widerspruch zur Annahme, und zusammen mit dem trivialen Fall $k = 1$ ist die Behauptung bewiesen.