



Die neuen MO-Tage sind MO-ntag und MO-nnerstag.

Liebe Schülerinnen und Schüler,

die aktuelle Corona-Krise beschäftigt auch uns Mathe-Fans. Damit ihr während dieser schweren Zeit nicht auf mathematische Herausforderungen verzichten müsst, haben wir, der Verein Mathematik-Olympiaden e.V. und das Talentförderzentrum Bildung & Begabung, die MO-Tage ins Leben gerufen.

Ab sofort veröffentlichen wir zweimal pro Woche ein Aufgabenblatt mit kniffligen Aufgaben aus den Mathematik-Olympiaden der vergangenen Jahre – jeden MO-ntag und MO-nnerstag. Pro Klassenstufe gibt es eine Aufgabe, sodass jede und jeder die eigene Schwierigkeitsstufe für sich selbst wählen kann. Zusätzlich zu dem Aufgabenblatt veröffentlichen wir außerdem ein Lösungsblatt zum letzten Aufgabenblatt.

Viel Spaß!

Serie 17 – Aufgaben

Die Lösungen werden am 25.05.2020 veröffentlicht.

Klassenstufe 3

a) Heute ist Samstag.

Welcher Wochentag war vorgestern?

b) Gestern war der 29. August.

Welches Datum haben wir übermorgen?

c) Der 1. September 2013 ist ein Sonntag.

Welcher Wochentag ist dann am 1. Oktober 2013?

d) Heute ist Dienstag.

Welcher Wochentag ist in 60 Tagen?

e) Der 8. Oktober ist ein Dienstag.

Wie viele Dienstage hat der Oktober in diesem Jahr?

Klassenstufe 4

In einer Dose liegen 24 Schokokekse. Lara nimmt sich ein Viertel der Kekse, Lukas nimmt sich ein Drittel der restlichen Kekse und Sarah die Hälfte der verbliebenen Kekse.

a) Wie viele Kekse hat Lara?

b) Wie viele Kekse hat Lukas?

c) Wie viele Kekse hat Sarah?

d) Wie viele Kekse bleiben in der Dose?

Notiere jeweils deinen Lösungsweg.

Klassenstufe 5

In dieser Aufgabe geht es darum, Zahlenfolgen nach folgendem Verfahren zu erzeugen:

- (0) Wähle eine Startzahl und notiere sie.
 - (1) Addiere 5 zur notierten Zahl.
 - (2) Verdoppele das Ergebnis aus Schritt (1).
 - (3) Ziehe nun vom Ergebnis aus Schritt (2) 10 ab.
 - (4) Notiere die nun erhaltene Zahl. Gehe wieder zu Schritt (1).
- a) Wähle als Startzahlen nacheinander die Zahlen 2, 6 und 7.
Durchlaufe die Anweisungen jeweils fünf Mal, so dass du jeweils sechs Zahlen notiert hast. Deine notierten Zahlen bilden jeweils den Beginn einer Zahlenfolge.
- b) Wähle dir zwei weitere Startzahlen und wiederhole jeweils die Rechnungen. Was kannst du beobachten, wenn du jeweils die Zahlen deiner Zahlenfolgen betrachtest? Begründe.
- c) Gibt es eine Anfangszahl, bei der du am Ende des vierten Durchlaufs (als fünfte Zahl der Zahlenfolge) die Zahl 104 erhältst? Begründe.

Klassenstufe 6

Wir sind gewohnt, Zahlen im Zehnersystem (dekadisches System), also mit den zehn Ziffern von 0 bis 9, darzustellen.

Ebenso kann man Zahlen auch nur unter Verwendung von den zwei Ziffern 0 und 1 darstellen; dieses System heißt Zweiersystem (Dualsystem), die so dargestellten Zahlen heißen dann Dualzahlen. Beispiele für die Umwandlung einer Dualzahl in das Zehnersystem und umgekehrt sind:

$$\begin{aligned} [10011]_2 &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = \mathbf{19} \end{aligned}$$

$$\mathbf{56} = 1 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = [111000]_2$$

Im Dualsystem gilt deshalb $[0]_2 + [0]_2 = [0]_2$, $[0]_2 + [1]_2 = [1]_2$, $[1]_2 + [1]_2 = [10]_2$.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

- a) Berechne alle Zweierpotenzen von 2^0 bis 2^{10} .
- b) Wandle die Dualzahlen $[1111]_2$ und $[10001]_2$ in Zahlen des Zehnersystems um.
- c) Stelle die Zahlen von 64 bis 69 (im Zehnersystem) jeweils als Dualzahlen dar.
- d) Berechne im Dualsystem $[110110]_2 + [10110]_2$, ohne die Zahlen vorher in das Zehnersystem umzuwandeln.
- e) Berechne im Dualsystem $[110101]_2 \cdot [1010]_2$, ohne die Zahlen vorher in das Zehnersystem umzuwandeln.

Klassenstufe 7

Simon hat begonnen, Karten eines Sammelkartenspiels zu sammeln. Die Karten, die er schon hat, gehören zu vier Typen: Die Hälfte seiner Karten sind Heldenkarten. Von den übrigen Karten sind zwei Drittel Energiekarten. Drei Viertel der Karten, die weder Heldenkarten noch Energiekarten sind, sind Monsterkarten. Die letzte Karte ist eine Verzauberungskarte.

Berechne, wie viele Karten Simon insgesamt bereits gesammelt hat.

Klassenstufe 8

Als Eulenspiegel wieder einmal auf Wanderschaft war, traf er unterwegs einen Handwerksburschen. Sie hatten Hunger und gingen gemeinsam bis zum nächsten Wirtshaus. Dort verspeisten sie ein köstliches Mahl, für das jeder von ihnen einen Taler hätte bezahlen müssen. Auf Wunsch des Wirtes begannen sie aber zunächst mit einem Kartenspiel.

Zuerst verlor Eulenspiegel die Hälfte seines Geldes zu gleichen Teilen an den Handwerksburschen und an den Wirt. Danach verlor der Handwerksbursche die Hälfte seines nun vorhandenen Geldes zu gleichen Teilen an Eulenspiegel und den Wirt. Schließlich verlor der Wirt die Hälfte seines dann vorhandenen Geldes zu gleichen Teilen an den Handwerksburschen und an Eulenspiegel. Nach Abschluss dieses dritten Spieles hatte jeder der drei Spieler genau 8 Taler.

Ermittle, wie viel jeder der Spieler bei diesem Kartenspiel insgesamt gewonnen oder verloren hat.

Klassenstufe 9

Wenn man aus der Zahl $z = 987\,654\,321$ einige Ziffern streicht und die Reihenfolge der restlichen Ziffern beibehält, erhält man eine neue Zahl mit weniger Ziffern.

- a) Ermitteln Sie alle Quadratzahlen, die beim Streichen von sechs der neun Ziffern entstehen können.
- b) Karl behauptet: „Wenn man die Ziffer 1 und genau drei weitere Ziffern streicht, so erhält man niemals eine Quadratzahl“. Beweisen Sie diese Aussage oder widerlegen Sie diese Aussage mit einem Gegenbeispiel.

Klassenstufe 10

Wir betrachten Folgen natürlicher Zahlen, bei denen die ersten zwei Zahlen vorgegeben sind und jede weitere Zahl die Summe der beiden vorhergehenden Zahlen ist.

- a) Es gelte $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ und $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ für alle $n > 0$. So gilt beispielsweise $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$ und $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$.

Berechnen Sie das Folgenglied a_8 .

- b) Ermitteln Sie für die Zahlenfolge aus Aufgabe a), ob das Folgenglied a_{2013} eine gerade oder ob es eine ungerade Zahl ist.
- c) Eine andere Zahlenfolge habe als Startwerte die beiden natürlichen Zahlen $a_1 = c$ und $a_2 = d$, und wieder gelte $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ für alle $n > 0$. Das Folgenglied a_{20} sei ungerade.

Untersuchen Sie, für welche der beiden Zahlen c und d man mit Sicherheit sagen kann, ob sie gerade oder ob sie ungerade ist.

Klassenstufen 11–13

Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen w, x, y, z , die die Gleichungen

$$x + 10z^2 = 2014, \tag{1}$$

$$2y + z = 54, \tag{2}$$

$$\left(y + 2z + \frac{7}{2}w\right)z = 1211 \tag{3}$$

erfüllen.