Serie 17 – Lösungen

Klassenstufe 3

Teil a) Vorgestern war Donnerstag.

Teil b) Übermorgen ist der 1. September.

Teil c) Der 1. Oktober 2013 ist ein Dienstag. Wenn der 1.9. ein Sonntag ist, dann ist auch der 8., 15., 22. und 29.9. ein Sonntag. Somit ist der 30.9. ein Montag und der 1.10. ein Dienstag.

Teil d) In 60 Tagen ist ein Samstag. In 56 Tagen ist erneut Dienstag ($8 \cdot 7 = 56$). Vier Tage später ist dann Samstag.

Teil e) Dieser Oktober hat 5 Dienstage, nämlich den 1., 8., 15., 22. und 29.10.

Klassenstufe 4

Teil a) $24 : 4 = 6$, Lara hat 6 Kekse.

Teil b) $24 - 6 = 18$,
$18 : 3 = 6$, Lukas hat 6 Kekse.

Teil c) $18 - 6 = 12$,
$12 : 2 = 6$, Sarah bekommt 6 Kekse.

Teil d) $12 - 6 = 6$, es sind noch 6 Kekse in der Dose.

Klassenstufe 5

Teil a) Die Ergebnisse jedes einzelnen Rechenschritts lauten (fettgedruckt die notierten Zahlen der gewünschten Zahlenfolgen):

2; 7; 14; **4**; 9; 18; **8**; 13; 26; **16**; 21; 42; **32**; 37; 74; **64**; ...
6; 11; 22; **12**; 17; 34; **24**; 29; 58; **48**; 53; 106; **96**; 101; 202; **192**; ...
7; 12; 24; **14**; 19; 38; **28**; 33; 66; **56**; 61; 122; **112**; 117; 234; **224**; ...

Die notierten Zahlenfolgen lauten:

2; 4; 8; 16; 32; 64
6; 12; 24; 48; 96; 192
7; 14; 28; 56; 112; 224

Teil b) Auch bei allen anderen Startzahlen entsteht als Zahlenfolge der notierten Zahlen eine Folge, bei der sich die zuvor notierte Zahl immer verdoppelt hat.

Begründung: Man addiert im Schritt (1) 5 und zieht nach dem Verdoppeln der Zahl das Doppelte von 5, also 10, ab. Dadurch bleibt es bei der Verdopplung der ursprünglichen Zahl.

Wenn man dies mit mathematischen Termen ausdrückt, dann entsteht im 1. Schritt aus einer Startzahl a die Zahl $a + 5$. Durch das Verdoppeln erhält man die Zahl $2a + 10$ und nach dem 3. Schritt $2a$.

Teil c) Nach viermaliger Verdopplung der Startzahl müsste also 104 herauskommen. Viermaliges Verdoppeln bedeutet eine Multiplikation mit 16; die Startzahl müsste also die Zahl 104 : 16 sein. Nun lässt sich aber 104 nicht durch 16 teilen; also gibt es keine solche (natürliche) Zahl.

Klassenstufe 6

Teil a)

2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

Teil b)

$$[1111]_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$$
$$[10001]_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 1 = 17$$

Teil c)

$$64 = 1 \cdot 2^6 = [1000000]_2$$

$$65 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^0 = [1000001]_2$$
$$66 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^1 = [1000010]_2$$
$$67 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = [1000011]_2$$

$$68 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^2 = [1000100]_2$$

$$69 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 = [1000101]_2$$

Teil d)

$$\begin{array}{r} 1\,1\,0\,1\,1\,0 \\ +\quad 1\,0\,1\,1\,0 \\ \hline 1\,0\,0\,1\,1\,0\,0 \end{array}$$

Teil e)

$$\begin{array}{r} 1\,1\,0\,1\,0\,1 \cdot 1\,0\,1\,0 \\ \hline 1\,1\,0\,1\,0\,1 \\ 1\,1\,0\,1\,0\,1 \\ \hline 1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0 \end{array}$$

Klassenstufe 7

Wir lösen die Aufgabe durch Rückwärtsarbeiten. Nach Aufgabenstellung besitzt Simon genau eine Verzauberungskarte.

Von den Karten, die Monster- oder Verzauberungskarten sind, sind drei Viertel Monsterkarten, also ein Viertel Verzauberungskarten. Folglich sind $(4 \cdot 1 =)$ 4 Karten Monster- oder Verzauberungskarten, davon 3 Monsterkarten.

Von den Karten, die Energie-, Monster- oder Verzauberungskarten sind, sind zwei Drittel Energiekarten, also ein Drittel Monster- oder Verzauberungskarten. Folglich sind $(3 \cdot 4 =)$ 12 Karten Energie-, Monster- oder Verzauberungskarten, davon $(12 - 4 =)$ 8 Energiekarten.

Unter allen Karten ist die Hälfte Heldenkarten, also die andere Hälfte Energie-, Monster- oder Verzauberungskarten. Folglich sind es $(2 \cdot 12 =)$ 24 Karten, davon 12 Heldenkarten.

Simon hat also insgesamt bereits 24 Karten gesammelt.

Klassenstufe 8

Wenn der Wirt nach Abschluss des dritten Spiels genau 8 Taler hatte und in diesem Spiel die Hälfte seines Geldes verloren hatte, dann muss er vor diesem Spiel (also nach Abschluss des zweiten Spiels) genau $(2 \cdot 8 =)$ 16 Taler gehabt haben. Wenn der Wirt die verlorenen 8 Taler zu gleichen Teilen (also je 4 Taler) an die Mitspieler verlor und diese nach Abschluss des dritten Spiels jeweils 8 Taler hatten, dann muss jeder der beiden vor dem Spiel 4 Taler gehabt haben. Folglich kann nur gelten: Nach Abschluss des zweiten Spieles hatte der Wirt genau 16 Taler, Eulenspiegel hatte genau 4 Taler und der Handwerksbursche hatte genau 4 Taler.

Analog lässt sich herleiten: Am Ende des ersten Spieles hatte der Handwerksbursche genau 8 Taler, Eulenspiegel hatte genau 2 Taler und der Wirt hatte genau 14 Taler.

Vor dem ersten Spiel hatte Eulenspiegel daher genau 4 Taler, der Handwerksbursche hatte genau 7 Taler und der Wirt hatte genau 13 Taler.

Subtrahiert man nun vom jeweiligen Endguthaben das jeweilige Startguthaben, dann folgt: Der Wirt hat genau 5 Taler verloren. Eulenspiegel hat genau 4 Taler gewonnen und der Handwerksbursche hat genau 1 Taler gewonnen.

Hinweis: Zum strukturierten Ermitteln der Lösung kann folgende Tabelle hilfreich sein:

	Eulenspiegel	Handwerksbursche	Wirt
Vor dem 1. Spiel	4	7	13
Nach Abschluss des 1. Spiels	$(4-2=)\ 2$	$(7+1=)\ 8$	$(13+1=)\ 14$
Nach Abschluss des 2. Spiels	$(2+2=)\ 4$	$(8-4=)\ 4$	$(14+2=)\ 16$
Nach Abschluss des 3. Spiels	$(4+4=)\ 8$	$(4+4=)\ 8$	$(16-8=)\ 8$
Gewinn	$(8-4=)\ 4$	$(8-7=)\ 1$	$(8-13=)\ -5$

Klassenstufe 9

Teil a) Wenn man sechs der neun Ziffern streicht, so erhält man eine dreistellige Zahl mit streng fallender Ziffernfolge. Es gibt 22 dreistellige Quadratzahlen ($10^2 = 100$ bis $31^2 = 961$). Davon haben nur $31^2 = 961$ und $29^2 = 841$ eine streng fallende Ziffernfolge. Man kann also nur diese beiden Quadratzahlen erhalten.

Teil b) Nach dem Streichen der Ziffer 1 und dreier weiterer Ziffern erhält man eine fünfstellige Zahl mit streng fallender Ziffernfolge, deren Endziffer folglich nur $2, 3, 4$ oder 5 sein kann.

Als Endziffer einer Quadratzahl kann nur die Endziffer einer der Zahlen $1^2, 2^2, \ldots, 9^2$, also nur $1, 4, 5, 6$ oder 9 vorkommen. Somit endet keine Quadratzahl auf 2 oder 3 und es bleiben als Endziffern nur noch die Ziffern 4 oder 5.

Wenn die letzte Ziffer einer Quadratzahl n^2 eine 4 ist, dann ist die Basis n dieser Quadratzahl durch 2 und die Quadratzahl daher durch 4 teilbar. Nach der Teilbarkeitsregel durch 4 muss deshalb die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar sein. Von den betrachteten fünfstelligen Zahlen mit streng fallender Ziffernfolge erfüllt nur 98 764 diese Bedingung. Wegen $314^2 = 98\,596 < 98\,764 < 99\,225 = 315^2$ ist 98 764 aber keine Quadratzahl.

Wenn nach dem Streichen von Ziffern die entstandene fünfstellige Zahl auf 5 endet, so kann es sich nur um die Zahl 98 765 handeln, die aber ebenfalls zwischen 314^2 und 315^2 liegt und somit auch keine Quadratzahl ist.

Damit ist bewiesen, dass Karl recht hat.

Klassenstufe 10

Teil a) Wir berechnen nacheinander a_5, a_6, a_7 und a_8. Es gilt

$$a_5 = a_4 + a_3 = 5,\ a_6 = a_5 + a_4 = 8,\ a_7 = a_6 + a_5 = 13 \text{ und } a_8 = a_7 + a_6 = 21\,.$$

Teil b) Die beiden ersten Folgenglieder sind ungerade. Die Summe zweier ungerader Zahlen ist eine gerade Zahl. Da die Summe aus einer geraden und einer ungeraden Zahl ungerade ist, folgen auf zwei ungerade Zahlen dieser Zahlenfolge jeweils eine gerade Zahl, dann wieder zwei ungerade Zahlen usw. Mit den gegebenen Startwerten ist somit genau jedes dritte Folgenglied gerade. Die Zahlen a_3, a_6 und a_9 sind also gerade, ebenso a_{2013}.

Teil c) Mindestens eine der Zahlen $a_1 = c$ und $a_2 = d$ muss ungerade sein, denn wenn beide gerade wären, wären auch alle weiteren Glieder der Zahlenfolge gerade, was der Voraussetzung, dass a_{20} ungerade ist, widerspricht.

Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

Fall 1: Sowohl $a_1 = c$ als auch $a_2 = d$ sind ungerade. Dann gilt nach den Untersuchungen in Aufgabenteil b), dass $a_3, a_6, \ldots, a_{18}$ und a_{21} gerade und die Folgenglieder dazwischen (auch a_{20}) ungerade sind.

Fall 2: $a_1 = c$ ist gerade und $a_2 = d$ ungerade. Dann sind $a_4, a_7, \ldots, a_{19}$ gerade, und a_{20} ist ungerade.

Fall 3: $a_1 = c$ ist ungerade und $a_2 = d$ gerade. Damit sind $a_5, a_8, \ldots, a_{20}$ gerade, was der Voraussetzung eines ungeraden Folgenglieds a_{20} widerspricht.

Nur die Fälle 1 und 2 führen zu einem ungeraden Folgenglied a_{20}. In beiden Fällen ist $a_2 = d$ ungerade und $a_1 = c$ ist im Fall 1 ungerade, im Fall 2 dagegen gerade. Die Zahl d muss also ungerade sein. Für c ist keine eindeutige Aussage möglich.

Klassenstufen 11–13

Angenommen, w, x, y, z sind positive ganze Zahlen, die die Bedingungen (1) bis (3) erfüllen. Da z und x positiv sind, folgt aus (1)

$$z = \sqrt{\frac{2014 - x}{10}} < \sqrt{\frac{2014}{10}} < \sqrt{202} < \sqrt{225} = 15\,.$$

Also ist $z \leq 14$ wegen der Ganzzahligkeit.

Aus (2) folgt $z = 2 \cdot (27 - y)$, also ist z gerade.

Verdoppelt man (3), so folgt aus $(2y + 4z + 7w) \cdot z = 2422 = 2 \cdot 7 \cdot 173$ und der Ganzzahligkeit, dass z ein Teiler von $2 \cdot 7 \cdot 173$ sein muss.

Da 2, 7 und 173 Primzahlen sind, bleiben für gerade Zahlen $z \leq 14$ die zwei Fälle $z = 2$ und $z = 2 \cdot 7$.

Fall 1: $z = 2$. Aus (2) folgt $y = 26$, und aus (3) folgt $\left(26 + 4 + \frac{7}{2}w\right) \cdot 2 = 1211$ und somit $7w = 1151$. Dann ist w keine ganze Zahl.

Fall 2: $z = 14$. Aus (1) folgt $x = 54$. Aus (2) folgt $y = 20$. Aus (3) folgt $w = 11$. Die Probe zeigt, dass diese Zahlen alle gewünschten Eigenschaften haben.

Somit gibt es eine eindeutige Lösung, nämlich $(w, x, y, z) = (11, 54, 20, 14)$.