BUNDESWEITE
MATHEMATIK-WETTBEWERBE
Bildung & Begabung

MO-Tage

Die neuen MO-Tage sind MO-ntag und MO-nnerstag.

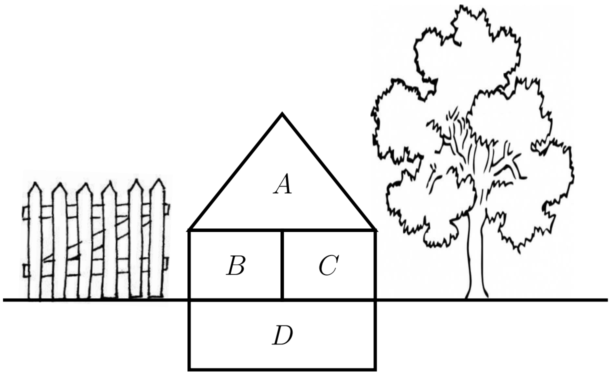
Liebe Schülerinnen und Schüler,

die aktuelle Corona-Krise beschäftigt auch uns Mathe-Fans. Damit ihr während dieser schweren Zeit nicht auf mathematische Herausforderungen verzichten müsst, haben wir, der Verein Mathematik-Olympiaden e.V. und das Talentförderzentrum Bildung & Begabung, die MO-Tage ins Leben gerufen.
Ab sofort veröffentlichen wir zweimal pro Woche ein Aufgabenblatt mit kniffligen Aufgaben aus den Mathematik-Olympiaden der vergangenen Jahre – jeden MO-ntag und MO-nnerstag. Pro Klassenstufe gibt es eine Aufgabe, sodass jede und jeder die eigene Schwierigkeitsstufe für sich selbst wählen kann. Zusätzlich zu dem Aufgabenblatt veröffentlichen wir außerdem ein Lösungsblatt zum letzten Aufgabenblatt.
Viel Spaß!

Serie 18 – Aufgaben

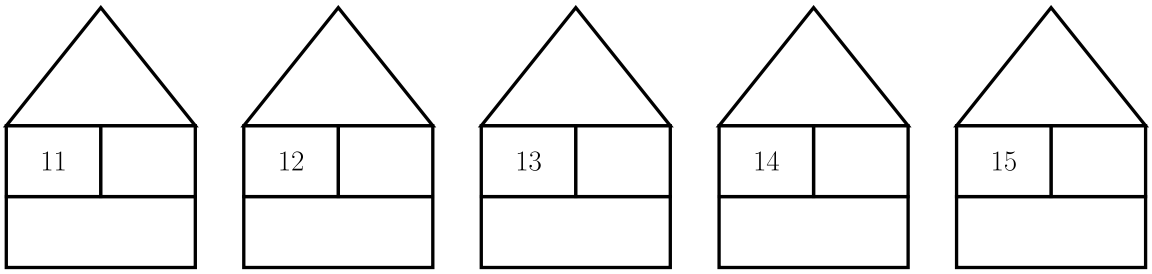
Die Lösungen werden am 28.05.2020 veröffentlicht.

Klassenstufe 3



Das Zahlenhaus hat ein Dachzimmer A, ein Erdgeschoss mit den Zimmern B und C und einen Keller D. Im Erdgeschoss wohnen zwei Zahlen, deren Summe im Dachzimmer wohnt, ihre Differenz wohnt im Keller. Im Zimmer B wohnt der Vorgänger vom Zimmer C.

a) Ergänze die fünf Zahlenhäuser nach der Regel.



b) Welche Regelmäßigkeit entdeckst du bei den Dachzahlen? Begründe.

Klassenstufe 4

Hier siehst du einen Ausschnitt aus der Hundertertafel. Die vier Zahlen in den Ecken sind durch Ringe gekennzeichnet. Zusammen ergeben sie die Summe 70.

a) Nun wird der Ring von der 1 auf die 11 verschoben. Verschiebe einen anderen Ring so um ein Feld, dass die vier Zahlen mit einem Ring zusammen wieder die Summe 70 ergeben. Finde alle Lösungen!

1	2	3	4
11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34

Lege die Ringe wieder in die vier Ecken. *Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

b) Jetzt werden alle vier Ringe um ein Feld auf den jeweiligen Diagonalen verschoben. Welche Summe haben die vier Zahlen mit einem Ring nun? Begründe, warum dies so sein muss!

1	2	3	4
11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34

Klassenstufe 5

Paul hat zehn Karten, auf denen jeweils eine der Ziffern 0 bis 9 so steht, dass jede Ziffer genau einmal vorkommt. Mit diesen Karten möchte er zweistellige und dreistellige Zahlen legen. Dabei darf die Karte mit der Null niemals am Anfang einer Zahl stehen.

a) Paul möchte eine zweistellige Zahl legen, die nur aus ungeraden Ziffern besteht. Schreibe alle möglichen Zahlen der Größe nach auf. Wie viele Zahlen sind es?

b) Wie viele dreistellige Zahlen mit nur ungeraden Ziffern kann Paul legen, wenn die Hunderterstelle eine Eins sein soll?

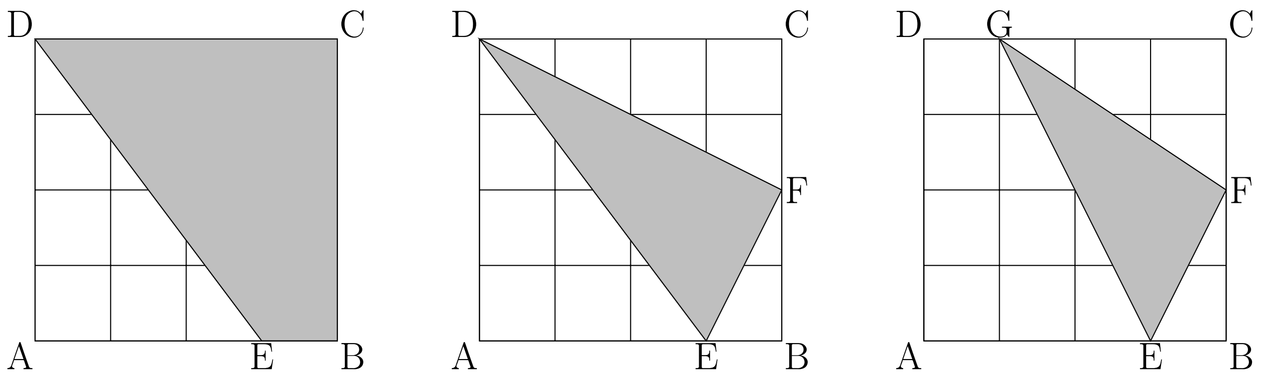
c) Ermittle, wie viele dreistellige Zahlen Paul legen kann, die nur aus ungeraden Ziffern bestehen.

d) Paul legt nun dreistellige Zahlen mit den Karten der geraden Ziffern. Wie viele solche dreistelligen Zahlen kann er mit seinen Karten legen?

Klassenstufe 6

Die drei Abbildungen zeigen ein Quadrat $ABCD$, das aus 4×4 Kästchen (Einheitsquadraten) besteht. Ein Teil ist jeweils grau gefärbt.

Berechne für jede graue Fläche den Flächeninhalt in Kästchen.



Klassenstufe 7

Gegeben sind zwei Strecken mit den Streckenlängen $a = 13\,\text{cm}$ und $b = 7\,\text{cm}$. Aus diesen beiden Strecken sollen unter Hinzunahme einer dritten Strecke Dreiecke gezeichnet werden. Alle Größen werden in Zentimeter angegeben.

a) Ermittle alle möglichen Längen der dritten Strecke, wenn außerdem gefordert wird, dass die Maßzahl p der Länge dieser Strecke eine Primzahl ist.

b) Ermittle alle möglichen Längen der dritten Strecke, wenn außerdem gefordert wird, dass die Maßzahl q der Länge dieser Strecke derart gewählt wird, dass die Maßzahl u des Umfangs des Dreiecks eine Primzahl ist.

Klassenstufe 8

a) Gabi hat vor sich ein 4×4-Spielfeld und 16 Spielmarken, die durchlaufend von 1 bis 16 beschriftet sind. Weil 7 ihre Glückszahl ist, nimmt sie die Spielmarke mit dieser Nummer als erste und legt sie auf das Feld in der linken oberen Ecke. Die anderen Spielmarken möchte sie so auf die übrigen Felder des 4×4-Spielfeldes verteilen, dass die Summen der 4 Nummern jeder Zeile und jeder Spalte alle denselben Wert haben.

   Zeige an einem Beispiel, dass Gabi dies erreichen kann.

b) Frank hat 100 Spielmarken, die durchlaufend von 1 bis 100 beschriftet sind. Er legt alle Marken, deren Beschriftung die Ziffer 7 enthalten, zur Seite.

   Untersuche, ob er die noch verbleibenden Spielmarken derart auf ein 10×10-Spielfeld verteilen kann, dass auf jedem Feld höchstens eine Marke liegt und die Summen der Nummern in jeder Zeile und jeder Spalte alle denselben Wert haben.

Klassenstufe 9

Gegeben ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und einem Umfang von 18 (Längeneinheiten). Auf dem Kreis sind die (paarweise verschiedenen) Punkte A, B, C, D, E und F in dieser Reihenfolge angeordnet. Die Bögen $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{DE}$ und $\overset{\frown}{EF}$ haben die Längen $|\overset{\frown}{AB}| = 4$, $|\overset{\frown}{BC}| = 3$, $|\overset{\frown}{DE}| = 2$ bzw. $|\overset{\frown}{EF}| = 3$.

a) Beweisen Sie: Wenn auch $|\overset{\frown}{CD}| = 2$ gilt, dann schneiden sich die Geraden AD, BE und CF in einem gemeinsamen Punkt.

b) Für $|\overset{\frown}{CD}| > 2$ sei R der Schnittpunkt von AD und BE, S der Schnittpunkt von AD und CF und T der Schnittpunkt von BE und CF.
Beweisen Sie, dass die Punkte R, S und T paarweise verschieden sind und ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Klassenstufe 10

Anton, Benno und Carsten treffen sich an ihrem heutigen gemeinsamen Geburtstag und stellen Folgendes fest:

> Anton: „Wenn ich so alt bin, wie Benno sein wird, wenn ich so alt bin, wie Carsten jetzt ist, dann wird Carsten 13-mal so alt sein, wie ich heute bin."
>
> Benno: „Allerdings wird Carsten dann noch keine 100 Jahre alt sein, du kleiner Pfiffikus."
>
> Carsten: „Richtig. Und in einigen Jahren werde ich doppelt so alt sein, wie ihr beide heute zusammen alt geworden seid, und dann wird Anton doppelt so alt sein, wie er heute geworden ist."

Zeigen Sie, dass sich hieraus eindeutig bestimmen lässt, wie alt die drei sind.

Hinweis: Es wird davon ausgegangen, dass es sich bei den drei Altersangaben um positive ganze Zahlen handelt.

Klassenstufen 11–13

Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. Ein weiterer Kreis k', dessen Mittelpunkt M' von M einen Abstand $d > 0$ hat, liege so in der Ebene, dass die beiden Kreise sich in zwei Punkten P und P' schneiden. Dabei sollen die Tangenten im Punkt P an die Kreise k und k' senkrecht aufeinanderstehen. Es sei S der Schnittpunkt der Strecken $\overline{MM'}$ und $\overline{PP'}$. Man bestimme die Länge der Strecke $\overline{MS}$ in Abhängigkeit von d und r.