Serie 18 – Lösungen

Klassenstufe 3

Teil a)

Haus	B	C	A	D
I	11	12	23	1
II	12	13	25	1
III	13	14	27	1
IV	14	15	29	1
V	15	16	31	1

Teil b) Mögliche Antworten:

- Wenn sich B um eins erhöht, dann wird die Dachzahl A um 2 erhöht.
- Die Dachzahl A ist immer ungerade, da von den Zahlen B und C immer eine gerade und eine ungerade ist. Daher ist deren Summe immer ungerade.
- Die Dachzahl ist der Nachfolger des Doppelten von B.
- Verändere ich die Zahl B um einen bestimmten Betrag, so verändert sich die Dachzahl um das Doppelte.

Klassenstufe 4

a) Wird der Ring von der 1 auf die 11 verschoben, erhöht sich die Summe der eingekreisten Zahlen um 10. Durch Verschieben der 31 auf die 21 oder der 34 auf die 24 wird dies ausgeglichen.

b) Jetzt liegen die Ringe auf den Zahlen 12, 13, 22 und 23. Diese vier Zahlen haben erneut die Summe 70.
Mögliche Begründung: Durch das Verschieben der 1 auf die 12 wird die Summe um 11 erhöht, dies wird durch das Verschieben der 34 auf die 23 ausgeglichen. Von der 4 zur 13 sind es $+9$, von der 31 zur 22 sind es -9. Die Summe bleibt also gleich.

Klassenstufe 5

Teil a) Es gibt die fünf ungeraden Ziffern 1, 3, 5, 7 und 9. Jede dieser Ziffern könnte an der Zehnerstelle oder auch an der Einerstelle der zweistelligen Zahl stehen. Für die Zehnerstelle hat Paul also 5 Karten zur Auswahl, von denen er eine an die Zehnerstelle legt. Dann bleiben ihm noch vier Karten zur Auswahl für die Einerstelle. Es gibt demnach insgesamt $(5 \cdot 4 =)$ 20 Zahlen, die Paul legen könnte. (Die Begründung für die Anzahl 20 wird nicht verlangt.)

Die 20 Zahlen, der Größe nach geordnet, sind:

13, 15, 17, 19, 31, 35, 37, 39, 51, 53, 57, 59, 71, 73, 75, 79, 91, 93, 95 und 97.

Teil b) Wenn Paul die Karte mit der 1 an die Hunderterstelle gelegt hat, kann er noch unter vier Karten die Zehnerstelle auswählen und unter drei Karten die Einerstelle. Er kann also $(4 \cdot 3 =)$ 12 verschiedene Zahlen legen. (Auch hier ist systematisches Aufschreiben als korrekt anzuerkennen.)

Teil c) Im Aufgabenteil b) wurde gezeigt, dass genau 12 dreistellige Zahlen gelegt werden können, wenn die 1 an der Hunderterstelle liegt. Nun kann aber auch die 3, 5, 7 oder 9 an der Hunderterstelle liegen, für die es jeweils ebenfalls 12 dreistellige Zahlen gibt. Insgesamt kann Paul folglich $(5 \cdot 12 =)$ 60 solcher Zahlen legen.

Teil d) Es gibt die fünf geraden Ziffern 0, 2, 4, 6 und 8. Die Karte mit der Ziffer 0 darf nicht an der Hunderterstelle liegen: Paul hat also vier Karten zur Auswahl für die Hunderterstelle, wieder vier Karten für die Zehnerstelle und drei Karten für die Einerstelle. Daraus folgt, dass er $(4 \cdot 4 \cdot 3 =)$ 48 verschiedene dreistellige Zahlen aus den Karten mit geraden Ziffern legen kann.

Klassenstufe 6

Der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ beträgt $(4 \cdot 4 =)$16 Kästchen.

Teil a) Der Flächeninhalt der grau markierten Fläche $EBCD$ kann berechnet werden, indem man vom Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ den Flächeninhalt des links liegenden Dreiecks AED subtrahiert. Dessen Flächeninhalt ist $(\frac{3 \cdot 4}{2} =)$ 6 Kästchen, so dass der Flächeninhalt der grauen Fläche $EBCD$ $(16 - 6 =)$ 10 Kästchen beträgt.

Teil b) Der Flächeninhalt der grau markierten Fläche EFD kann berechnet werden, indem man vom Flächeninhalt des Quadrats die Flächeninhalte der drei Dreiecke AED, EBF und FCD in den Ecken abzieht.

Das linke Dreieck AED hat, wie in a) gezeigt, einen Flächeninhalt von 6 Kästchen; der Flächeninhalt des oberen Dreiecks FCD beträgt $(\frac{4 \cdot 2}{2} =)$ 4 Kästchen, der Flächeninhalt des unteren Dreiecks EBF beträgt $(\frac{1 \cdot 2}{2} =)$ 1 Kästchen.

Folglich hat die graue Fläche EFD den Flächeninhalt
$(16 - 6 - 4 - 1 =)\,5$ Kästchen.

Teil c) Der Flächeninhalt der grau markierten Fläche EFG kann berechnet werden, indem man vom Flächeninhalt des Quadrats die Flächeninhalte der beiden Dreiecke EBF und FCG sowie den Flächeninhalt der linken Fläche $AEGD$ abzieht.

Die linke Fläche $AEGD$ kann in ein Rechteck mit einem Flächeninhalt von $(4{\cdot}1 =)\,4$ Kästchen und ein Dreieck mit dem Flächeninhalt von $(\frac{4\cdot 2}{2} =)\,4$ Kästchen zerlegt werden.

Das Dreieck EBF hat, wie bereits gezeigt, einen Flächeninhalt von 1 Kästchen, das Dreieck FCG hat einen Flächeninhalt von $(\frac{3\cdot 2}{2} =)\,3$ Kästchen.

Folglich hat die graue Fläche EFG einen Inhalt von $(16-8-1-3 =)\,4$ Kästchen.

Klassenstufe 7

Teil a) I. Wenn drei Strecken mit den Längen a, b und c die Seiten eines Dreiecks bilden sollen, dann müssen die folgenden Dreiecksungleichungen erfüllt sein:

$$a + b > c, \qquad a + c > b, \qquad b + c > a.$$

Für $a = 13\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$ und $c = p\,\text{cm}$ muss daher gelten

$$20 > p, \qquad 13 + p > 7, \qquad 7 + p > 13.$$

Da für positive ganze Zahlen p stets $13 + p > 7$ gilt und die dritte Ungleichung äquivalent zu $p > 13 - 7$ ist, können die drei Ungleichungen zu $6 < p < 20$ zusammengefasst werden. Da p nach Voraussetzung eine Primzahl ist, kann daher nur $p \in \{7, 11, 13, 17, 19\}$ gelten.

II. Wie man sich leicht überzeugt, erfüllen diese Zahlen tatsächlich die gestellten Bedingungen.

Aus I. und II. folgt, dass 7 cm, 11 cm, 13 cm, 17 cm und 19 cm alle möglichen Längen der dritten Strecke sind, welche die gestellten Bedingungen erfüllen.

Teil b) I. Wenn es eine Strecke mit der Länge $q\,\text{cm}$ gibt, welche die gestellten Bedingungen erfüllt, dann muss entsprechend Teil a) nun $6 < q < 20$ gelten. Für die Maßzahl u des Umfanges gilt $13 + 7 + q = u$. Hieraus folgt $20 + q = u$ und daher $u > 20$. Da u nach Voraussetzung eine Primzahl ist, gilt also $u \in$

$\{23, 29, 31, 37, 41, \ldots\}$. Hieraus und aus $q = u - 20$, $6 < q < 20$ folgt $q \in \{9, 11, 17\}$.

II. Wie man sich leicht überzeugt, erfüllen die drei Zahlen für q alle gestellten Bedingungen.

Aus I. und II. folgt, dass 9 cm, 11 cm und 17 cm alle möglichen Längen der dritten Strecke sind, welche die gestellten Bedingungen erfüllen.

Hinweis: Ein Existenznachweis durch Konstruktion ist auf Grund von Zeichenungenauigkeiten kein ausreichender Beweis.

Klassenstufe 8

Teil a) Die Summe aller Nummern ist $(1 + 2 + 3 + \cdots + 16 =)$ 136. Damit die Zeilensummen und die Spaltensummen gleich sind, muss die Summe der Zahlen in jeder Zeile bzw. Spalte den Wert $(136 : 4 =)$ 34 haben. In das oberste linke Feld legt Gabi die Spielmarke mit der Nummer 7. Nun kann sie die Spielmarken den Nummern entsprechend zum Beispiel in folgender Weise anordnen:

7	12	9	6
2	13	16	3
14	1	4	15
11	8	5	10

Tatsächlich ist die Summe der Nummern in den Zeilen und Spalten jeweils gleich, nämlich 34.

Teil b) Die Summe aller Nummern ist $(1+2+3+\cdots+98+99+100 = 50\cdot 101 =)$ 5050.

Frank entfernt die Spielmarken mit den Beschriftungen 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 87, 97. Ihre Summe beträgt 1188. Folglich beträgt der Summenwert der verbleibenden Spielmarken $(5050 - 1188 =)$ 3862. Damit die Summenwerte der 10 Zeilen und der 10 Spalten gleich sind, muss der Wert der noch verbleibenden Spielmarken aber durch 10 teilbar sein, was nicht der Fall ist.

Die noch verbleibenden Spielmarken können daher nicht in der geforderten Weise auf das Spielfeld verteilt werden.

Klassenstufe 9

Teil a) Für die Bogenlängen gilt $|\overset{\frown}{FA}| = 18 - |\overset{\frown}{AB}| - |\overset{\frown}{BC}| - |\overset{\frown}{CD}| - |\overset{\frown}{DE}| - |\overset{\frown}{EF}| = 4$. Wegen $|\overset{\frown}{AB}| = |\overset{\frown}{FA}|\ (= 4)$, $|\overset{\frown}{BC}| = |\overset{\frown}{EF}|\ (= 3)$ und $|\overset{\frown}{CD}| = |\overset{\frown}{DE}|\ (= 2)$ liegen die Punkte E und F bezüglich der Geraden AD spiegelbildlich zu C und B. Bei der Spiegelung an AD werden also BE auf CF und CF auf BE abgebildet, und damit liegt der Schnittpunkt von BE und CF auf der Spiegelachse AD. Dieser Schnittpunkt ist der gemeinsame Punkt der drei Geraden.

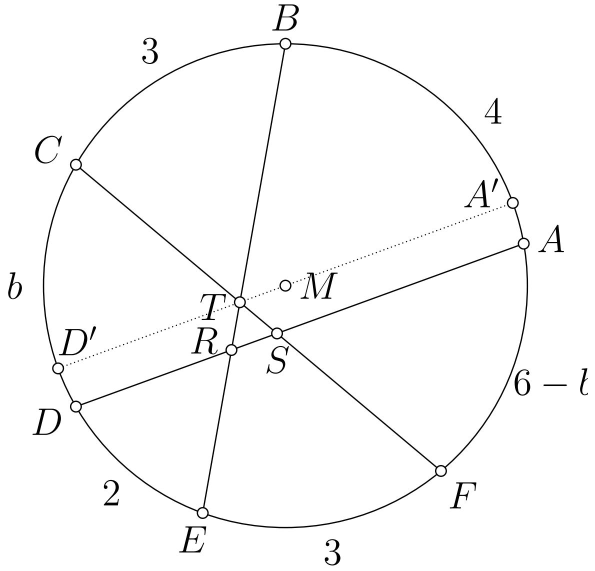

Abbildung 1

Teil b) Wir bezeichnen $b = |\overset{\frown}{CD}|$. Wie in Teil a) erhält man $|\overset{\frown}{FA}| = 6 - b$ und damit insbesondere $2 < b < 6$. Sei A' der Punkt auf $\overset{\frown}{AB}$, für den $|\overset{\frown}{AA'}| = \frac{b}{2} - 1$ ist, und D' der Punkt auf $\overset{\frown}{CD}$, für den $|\overset{\frown}{D'D}| = \frac{b}{2} - 1$ gilt (siehe Abbildung 1). Nun ist $|\overset{\frown}{FA'}| = 5 - \frac{b}{2}$.

Wegen $|\overset{\frown}{A'B}| = |\overset{\frown}{FA'}|\ (= 5 - \frac{b}{2})$, $|\overset{\frown}{BC}| = |\overset{\frown}{EF}|\ (= 3)$ und $|\overset{\frown}{CD'}| = |\overset{\frown}{D'E}|\ (= 1 + \frac{b}{2})$ folgt mit der gleichen Argumentation wie in Teil a), dass sich $A'D'$, BE und CF im gemeinsamen Punkt T schneiden.

Da $A'D'$ Spiegelachse ist, gilt

$$|\sphericalangle CTD'| = |\sphericalangle D'TE| \ . \tag{1}$$

Da $|\overset{\frown}{BC}| = |\overset{\frown}{EF}| = 3$ und damit ein Sechstel des Kreisumfangs 18 ist, gehen bei einer Drehung um den Winkel von $60°$ im mathematisch positiven Sinn um den Mittelpunkt M der Punkt B in den Punkt C, der Punkt E in den Punkt F und damit die Gerade BE in die Gerade CF über. Also schneiden sich diese Geraden in einem Winkel von 60°, d. h. es ist

$$|\sphericalangle BTC| = 60^\circ\,. \tag{2}$$

Wegen $|\overset{\frown}{D'D}| = |\overset{\frown}{AA'}|$ $(= \frac{b}{2} - 1)$ sind $A'D'$ und AD parallel und verschieden. Aufgrund des gemeinsamen Schnittpunktes von $A'D'$, BE und CF bilden die in der Aufgabe genannten Schnittpunkte R, S und T ein nicht entartetes Dreieck. Da sich die Winkel BTC, CTD' und $D'TE$ zu einem gestreckten Winkel ergänzen, folgt aus (1) und (2), dass

$$|\sphericalangle BTC| = |\sphericalangle CTD'| = |\sphericalangle D'TE| = 60^\circ$$

gilt. Aus den Sätzen über Wechselwinkel an parallelen Geraden sowie über Scheitelwinkel erhält man $|\sphericalangle SRT| = |\sphericalangle RTS| = 60^\circ$, woraus die Gleichseitigkeit von Dreieck RST folgt.

Klassenstufe 10

Wir bezeichnen das jeweilige Alter, welches die drei an ihrem heutigen Geburtstag erreichen, mit a, b bzw. c.

Anton ist in a Jahren doppelt so alt, wie er heute ist. Damit gilt nach Carstens Aussage

$$c + a = 2 \cdot (b + a), \text{ also } c = 2 \cdot b + a\,.$$

Anton ist in $c - a$ Jahren so alt wie Carsten heute. Dann ist Benno $b + (c - a) = c + b - a$ Jahre alt. Anton erreicht dieses Alter in $(c + b - a) - a = c + b - 2 \cdot a$ Jahren. Nach Antons Aussage gilt dann

$$c + (c + b - 2 \cdot a) = 13 \cdot a, \text{ also } 2 \cdot c + b = 15 \cdot a\,.$$

Mit $c = 2 \cdot b + a$ ergibt sich daraus

$$(4 \cdot b + 2 \cdot a) + b = 15 \cdot a, \text{ also } 5 \cdot b = 13 \cdot a\,.$$

Da a und b positive ganze Zahlen sind, muss a ein positives Vielfaches von 5 sein. Nach Bennos Aussage gilt $13 \cdot a < 100$. Somit erhalten wir $a = 5$ und damit $b = 13$. Für c ergibt sich $c = 31$.

Klassenstufen 11–13

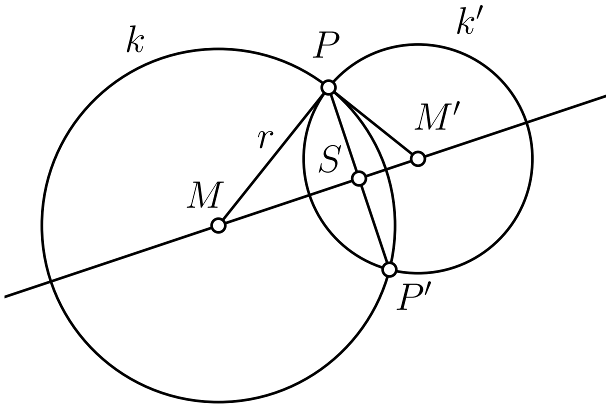

Abbildung 1

Da die Tangenten an die Kreise in P einander senkrecht schneiden und die zugehörigen Radien senkrecht auf den Tangenten stehen, sind auch die Radien senkrecht zueinander, siehe Abbildung 1. Also ist das Dreieck $MM'P$ rechtwinklig mit der Hypotenuse $\overline{MM'}$.

Da die Strecke $\overline{PP'}$ eine gemeinsame Sehne der Kreise k und k' ist, steht sie senkrecht auf der Zentralen MM' der beiden Kreise.

Damit ist die Strecke $\overline{PS}$ eine Höhe im rechtwinkligen Dreieck $MM'P$, sodass nach dem Kathetensatz $r^2 = |MP|^2 = |MS| \cdot |MM'| = |MS| \cdot d$ und $|MS| = r^2/d$ gilt.