BUNDESWEITE MATHEMATIK-WETTBEWERBE
Bildung & Begabung

MO-Tage

Die neuen MO-Tage sind MO-ntag und MO-nnerstag.

Liebe Schülerinnen und Schüler,

die aktuelle Corona-Krise beschäftigt auch uns Mathe-Fans. Damit ihr während dieser schweren Zeit nicht auf mathematische Herausforderungen verzichten müsst, haben wir, der Verein Mathematik-Olympiaden e.V. und das Talentförderzentrum Bildung & Begabung, die MO-Tage ins Leben gerufen.
Ab sofort veröffentlichen wir zweimal pro Woche ein Aufgabenblatt mit kniffligen Aufgaben aus den Mathematik-Olympiaden der vergangenen Jahre – jeden MO-ntag und MO-nnerstag. Pro Klassenstufe gibt es eine Aufgabe, sodass jede und jeder die eigene Schwierigkeitsstufe für sich selbst wählen kann. Zusätzlich zu dem Aufgabenblatt veröffentlichen wir außerdem ein Lösungsblatt zum letzten Aufgabenblatt.
Viel Spaß!

Serie 19 – Aufgaben

Die Lösungen werden am 01.06.2020 veröffentlicht.

Klassenstufe 3

	Klasse 1A	Klasse 1B	Klasse 2A	Klasse 2B	Klasse 3A	Klasse 3B	Klasse 4A	Klasse 4B
Mädchen	8	11	12		11	9	8	14
Jungen	16	11	13	8	13	14	13	
Gesamtzahl		22	25	25	24	23	21	23
Jahrgang	46		50				44	

a) Ergänze die fehlenden Angaben in der Tabelle!

b) Wie viele Kinder gehen insgesamt in diese Grundschule?

c) Wie viele Mädchen gehen in diese Grundschule?

d) Wie viele Jungen gehen in diese Grundschule?

e) In welchem Jahrgang sind die wenigsten Jungen?

f) Für das neue Schuljahr liegen 49 Anmeldungen für den 1. Jahrgang vor und 2 Kinder aus dem 3. Jahrgang ziehen weg.
Wie viele Schüler besuchen im neuen Schuljahr diese Grundschule?

Klassenstufe 4

a) Fünf Hockeymannschaften A, B, C, D, E bestreiten ein Turnier, in dem jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere spielt. Wie viele Spiele sind nötig? Schreibe alle Spiele auf.
Beginne so: A gegen B

b) Am Ende des Turniers belegt Mannschaft A den ersten und Mannschaft C den letzten Platz. Welche Platzierungen können die anderen drei Mannschaften erreicht haben? Gib alle Möglichkeiten an.

Hinweis: Bei Punkt- und Torgleichheit entscheidet das Los, sodass jede Platzierung eindeutig vergeben wird.

Klassenstufe 5

Die vier Jungen Andreas, Benedikt, Christian und Daniel stehen nebeneinander. Lara stellt fest, dass sie alle unterschiedlich groß sind, und macht folgende vier Aussagen:

(1) Christian ist der Zweitgrößte.
(2) Andreas ist nicht der Größte.
(3) Der Junge links von Daniel ist größer als Daniel.
(4) Daniel ist kleiner als Andreas.

a) Zeige, dass man aus diesen Aussagen eindeutig die Reihenfolge der vier Jungen nach ihrer Größe herausfinden kann. Gib diese Reihenfolge an. Beginne dabei mit dem größten Jungen.
b) Eine der vier Aussagen ist sogar überflüssig. Welche ist das? Begründe, dass diese überflüssig ist.

Klassenstufe 6

a) Sabine betrachtet einen Spielwürfel mit den Zahlen von 1 bis 6 genauer und will sich für ihre Mitschüler in der Arbeitsgemeinschaft eine Aufgabe ausdenken. Sie weiß, dass die auf gegenüberliegenden Seitenflächen stehenden Zahlen zusammen stets die Summe 7 haben.
Sie will die „Eckproduktsumme“ suchen lassen, die wie folgt gebildet werden soll: Sabine berechnet zunächst für jede Ecke das „Eckprodukt“, indem sie die auf den Seitenflächen stehenden Zahlen der Seitenflächen multipliziert, die an dieser Ecke zusammentreffen. Alle „Eckprodukte“ werden nun addiert und bilden die „Eckproduktsumme“.
Welche „Eckproduktsumme“ hat der Spielwürfel?
b) Auf den Seitenflächen sollen nun nicht die Zahlen von 1 bis 6 stehen, sondern alle einstelligen Zahlen sollen möglich sein, auch mehrfach. Welche Zahlen müssen auf den Seitenflächen des Würfels stehen, wenn man die größte „Eckproduktsumme“ erhalten will, und wie groß ist diese „Eckproduktsumme“?
c) Jetzt sollen auf den Seitenflächen wiederum die Zahlen von 1 bis 9 stehen können, aber jede Zahl darf nur einmal vorkommen. Finde eine Belegung der Seitenflächen, so dass eine „Eckproduktsumme“ entsteht, die größer als 2011 ist.

Klassenstufe 7

a) Zeichne 6 paarweise verschiedene Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 und g_6 derart, dass sie genau 6 Schnittpunkte haben und jede dieser sechs Geraden zu genau einer der anderen fünf Geraden parallel ist.

b) Untersuche, ob man 6 paarweise verschiedene Geraden derart zeichnen kann, dass sie eine ungerade Anzahl an Schnittpunkten haben und jede dieser sechs Geraden zu genau einer der anderen fünf Geraden parallel ist.

c) Gib eine Vermutung an, für welche Zahlen n man 6 paarweise verschiedene Geraden derart zeichnen kann, dass sie genau n Schnittpunkte haben. Erstelle hierzu für jede dieser möglichen Anzahlen n eine entsprechende Zeichnung.

Hinweis: Gemeinsame Schnittpunkte mehrerer Geraden werden nur einmal gezählt. Mit „paarweise verschiedenen Geraden" ist gemeint, dass keine zwei dieser Geraden zueinander gleich sind.

Klassenstufe 8

Von einem Dreieck ABC wird gefordert:

(1) Der Innenwinkel BAC hat die Größe $\alpha = 45°$.

(2) Die Strecke $\overline{CD}$ vom Punkt C zum Lotfußpunkt D auf der Geraden AB ist 5 cm lang.

(3) Der (spitze) Winkel zwischen der Geraden CD und der Winkelhalbierenden w_γ des Winkels ACB hat eine Größe δ mit $\delta > 0°$.

a) Konstruiere ein solches Dreieck ABC für $\delta = 10°$ und beschreibe deine Konstruktion.

b) Überprüfe anhand der Zeichnung, ob es für $\delta = 10°$ mehrere zueinander nicht kongruente Dreiecke ABC mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) gibt.

Klassenstufe 9

Bert versucht, die Seitenflächen eines Würfels so mit Zahlen u (unten), o (oben), r (rechts), l (links), v (vorn) und h (hinten) zu beschriften, dass die zwölf Absolutbeträge der Differenzen von Zahlen benachbarter Seitenflächen gerade die natürlichen Zahlen von 1 bis 12 ergeben.

a) Finden Sie eine solche Beschriftung!

b) Weisen Sie nach, dass die Zahl 17 das größte mögliche Ergebnis ist, welches bei einer solchen Beschriftung als Differenz von Zahlen zweier gegenüberliegender Seitenflächen auftreten kann.

Klassenstufe 10

In einem rechtwinkligen (x, y)-Koordinatensystem sind die Punkte $A(0, 0)$, $B(b, 0)$, $C(b, c)$ und $D(0, d)$ mit positiven reellen Zahlen b, c, d gegeben. Es sei E der Schnittpunkt der Geraden AC und BD. Mit F wird der Fußpunkt des Lotes von E auf die Gerade AB bezeichnet.

a) Bestimmen Sie für $b = 5$, $c = 3$ und $d = 6$ die Länge der Strecke $\overline{EF}$.

b) Wählt man aus den Punkten A, B, C, D, E und F jeweils drei Punkte aus, die nicht auf einer Geraden liegen, so erhält man ein Dreieck. Nennen Sie drei verschiedene Paare ähnlicher Dreiecke, die man auf diese Weise erhalten kann.

c) Zeigen Sie allgemein für beliebige positive reelle Werte von b, c und d, dass stets

$$|EF| = \frac{c \cdot d}{c + d}$$

gilt.

Klassenstufen 11–13

In der Eisdiele „Parabolo“ gibt es als Attraktion das Eis in Waffeln einer besonderen Form. Diese entsteht, indem der Graph der Parabel $y = ax^2$ mit $a > 0$ um die y-Achse rotiert wird. Der Betreiber möchte eine Eiskugel so in die Waffel füllen, dass sie diese im tiefsten Punkt berührt.

Man ermittle alle möglichen Radien der Eiskugel in Abhängigkeit vom Parameter a.