Serie 19 – Lösungen

Klassenstufe 3

Teil a)

	Klasse 1A	Klasse 1B	Klasse 2A	Klasse 2B	Klasse 3A	Klasse 3B	Klasse 4A	Klasse 4B
Mädchen	8	11	12	**17**	11	9	8	14
Jungen	16	11	13	8	13	14	13	**9**
Gesamtzahl	**24**	22	25	25	24	23	21	23
Jahrgang	46		50		**47**		44	

Teil b) $46 + 50 + 47 + 44 = 187$

Teil c) $8 + 11 + 12 + 17 + 11 + 9 + 8 + 14 = 90$

Teil d) $16 + 11 + 13 + 8 + 13 + 14 + 13 + 9 = 97$ oder $187 - 90 = 97$

Teil e) Im Jahrgang 2 sind 21 Jungen.

Teil f) Jahrgang 4 verlässt die Schule, das sind 44 Schüler. Da zusätzlich 2 Kinder wegziehen und im neuen ersten Jahrgang 49 Schüler hinzukommen, sind es dann $(187 - 44 - 2 + 49 =)$ 190 Schüler.

Klassenstufe 4

Teil a) Es finden 10 Spiele statt.

A gegen B	B gegen C	C gegen D	D gegen E
A gegen C	B gegen D	C gegen E	
A gegen D	B gegen E		
A gegen E			

Teil b) 6 Möglichkeiten

1. Platz	**2. Platz**	**3. Platz**	**4. Platz**	**5. Platz**
A	B	D	E	C
A	B	E	D	C
A	D	B	E	C
A	D	E	B	C
A	E	B	D	C
A	E	D	B	C

Klassenstufe 5

Teil a) Da Christian der Zweitgrößte ist (wegen (1)), Andreas nicht der Größte ist (wegen (2)) und Daniel nicht der Größte sein kann (wegen (4)), muss Benedikt der Größte sein.

Folglich sind Daniel und Andreas auf die Plätze 3 und 4 zu verteilen, und aus Aussage (4) folgt, dass Daniel der Kleinste ist.

Die Reihenfolge lautet demzufolge Benedikt, Christian, Andreas, Daniel.

Teil b) Da man zur Lösung von a) die Aussage (3) nicht benötigt, ist diese Aussage überflüssig.

Klassenstufe 6

Teil a) Betrachten wir die Ecken paarweise, jeweils die Paare, die an einer Diagonale des Würfels gegenüberliegen. In jedem dieser Paare liegt eine Ecke, die an die Seitenfläche mit der „1“ angrenzt, und eine Ecke, die an die Seitenfläche mit der „6“ angrenzt. Weiterhin gehört jede der vier anderen Seiten zu genau einer dieser Ecken.

Es ergeben sich somit folgende Eckprodukte, jeweils in den Paaren geordnet:

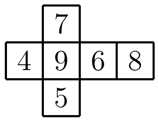
$(1 \cdot 2 \cdot 3) = 6$ und $(4 \cdot 5 \cdot 6) = 120$; $(1 \cdot 2 \cdot 4) = 8$ und $(3 \cdot 5 \cdot 6) = 90$; $(1 \cdot 3 \cdot 5) = 15$ und $(2 \cdot 4 \cdot 6) = 48$; $(1 \cdot 4 \cdot 5) = 20$ und $(2 \cdot 3 \cdot 6) = 36$.

Diese Überlegung ist unabhängig davon, in welcher Drehrichtung die Zahlen „2“, „3“, „5“ und „4“ auf den vier Würfelseiten zwischen den Seiten „1“ und „6“ angeordnet sind.

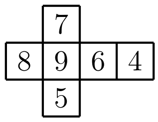
Folglich ergibt sich für die Eckproduktsumme $(6+120+8+90+15+48+20+36 =)$ 343.

Teil b) Hier müssen alle Seitenflächen die Zahl „9“ tragen. Also hat jede Ecke das „Eckprodukt“ $(9 \cdot 9 \cdot 9 =)729$, und die „Eckproduktsumme“ ist das Achtfache dieser Zahl, also 5832.

Teil c) Eine solche „Eckproduktsumme“ ergibt sich, wenn man die „9“ und die „8“ gegenüber anordnet und die Zahlen „7“ und „6“ sowie „5“ und „4“ in dieser Reihenfolge auf die vier freien Felder schreibt. Dann ist die „Eckproduktsumme“ $(9+8)\cdot(7\cdot 4+7\cdot 6+5\cdot 4+5\cdot 6)=2040$.

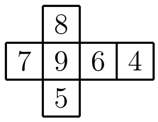


Eine größere „Eckproduktsumme“ erhält man bei folgendem Würfelnetz:



Dann ist die „Eckproduktsumme“ $(9+4)\cdot(5\cdot 6+6\cdot 7+7\cdot 8+5\cdot 8)=2184$.

Eine noch größere „Eckproduktsumme“ erhält man bei folgendem Würfelnetz:



Hier ist die „Eckproduktsumme“ $(9+4)\cdot(5\cdot 6+6\cdot 8+7\cdot 8+5\cdot 7)=2197$; dies ist die größte Summe.

Klassenstufe 7

Teil a) In der Abbildung 1 sind sechs paarweise verschiedene Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6 derart gezeichnet, dass jede dieser sechs Geraden zu genau einer der anderen fünf Geraden parallel ist und diese Geraden insgesamt genau 6 Schnittpunkte miteinander haben.

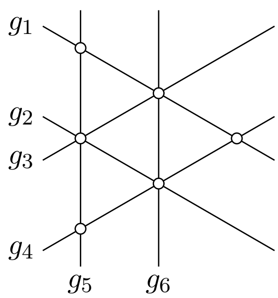


Abbildung 1

Teil b) Wir betrachten eine Konfiguration aus sechs paarweise verschiedenen Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, von denen jede dieser sechs Geraden zu genau einer der anderen fünf Geraden parallel ist. Wir können die Bezeichnungen so wählen, dass g_1 parallel zu g_2, g_3 parallel zu g_4 und g_5 parallel zu g_6 ist. Es seien A, B, C und D die Schnittpunkte von g_1 und g_3, von g_2 und g_3, von g_2 und g_4 bzw. von g_1 und g_4. Da diese vier Geraden paarweise voneinander verschieden sind, sind auch A, B, C und D paarweise voneinander verschieden. Durch g_1, g_2, g_3, g_4 werden also insgesamt genau 4 Schnittpunkte erzeugt.

Die Geraden g_5 und g_6 können höchstens durch einen der Schnittpunkte A, B, C oder D verlaufen, da sie andernfalls mit einer der Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 übereinstimmen würden. Die Geraden g_5 und g_6 können als zueinander parallele, aber verschiedene Geraden keinen Punkt gemeinsam enthalten.

Verläuft weder die Gerade g_5 noch die Gerade g_6 durch einen der Punkte A, B, C und D, so entstehen durch g_5 und g_6 jeweils 4 neue Schnittpunkte mit den Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4. Insgesamt sind es dann 12 Schnittpunkte, also eine gerade Anzahl an Schnittpunkten.

Verläuft g_5 durch einen der Punkte A, B, C oder D, so schneidet g_5 genau 2 der Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 in einem schon gezählten Schnittpunkt, sodass dann durch g_5 nur 2 statt 4 neue Schnittpunkte entstehen. Entsprechendes gilt für g_6. Die Anzahl 12 der Schnittpunkte verringert sich daher gegebenenfalls auf 10 bzw. gar 8. In jedem Fall ist sie aber gerade.

Man kann also sechs paarweise verschiedene Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6 nicht derart zeichnen, dass jede dieser sechs Geraden zu genau einer der anderen fünf Geraden parallel ist und die Anzahl ihrer Schnittpunkte ungerade ist.

Teil c) Die Vermutung lautet:

> Nur für die Anzahlen n aus der Menge $\{0, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ ist es möglich, 6 paarweise verschiedene Geraden derart zu zeichnen, dass sie genau n Schnittpunkte haben.

Die Anzahl 6 wurde schon in Teilaufgabe a) untersucht. In der nachfolgenden Abbildung 2 ist jeweils eine entsprechende Konfiguration für die anderen Anzahlen n gezeichnet.

Bemerkung: Man kann sich schnell überlegen, wie viele Schnittpunkte die sechs Geraden maximal haben können: Die erste Gerade hat insgesamt höchstens 5 Schnittpunkte mit den anderen 5 Geraden, die zweite Gerade hat höchstens noch 4 weitere Schnittpunkte mit den restlichen 4 Geraden und so weiter. Die fünfte Gerade hat noch höchstens einen weiteren Schnittpunkt mit der sechsten Geraden. Bei 6 Geraden sind es daher höchstens $(5 + 4 + 3 + 2 + 1 =)$ 15 Schnittpunkte. Es gilt folglich $n \leq 15$.

Die Anzahl der Schnittpunkte verringert sich für jedes Paar paralleler Geraden um 1, da ihr Schnittpunkt entfällt. Schneiden sich k Geraden in einem Punkt, dann werden die maximal $((k-1)+(k-2)+\cdots+1 =)$ $\frac{1}{2}(k-1)k$ Schnittpunkte dieser k Geraden zu einem Punkt zusammengefasst, die Anzahl der Schnittpunkte verringert sich um $\frac{1}{2}(k-1)k-1$. Durch parallele Geraden und durch gemeinsame

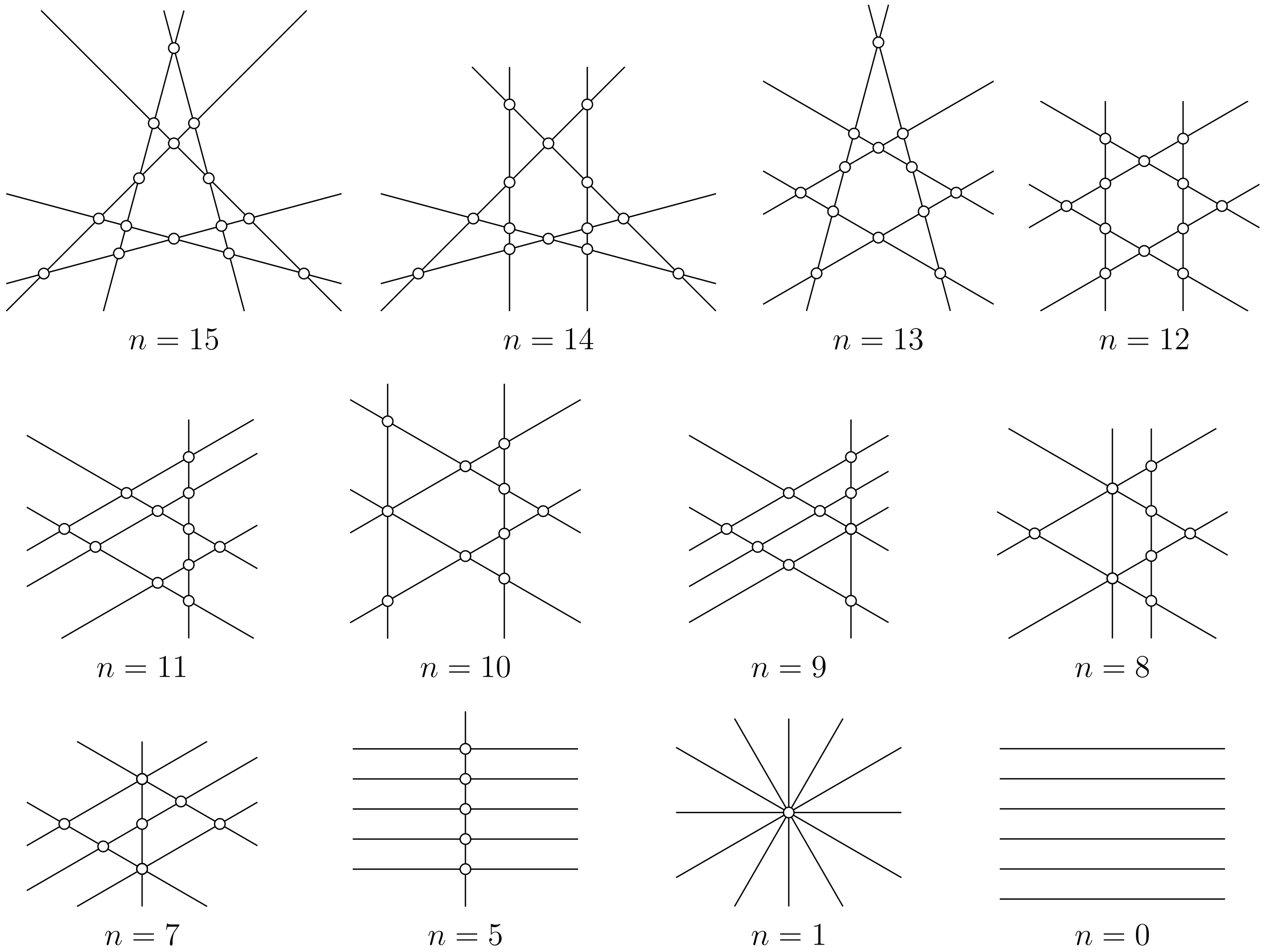


Abbildung 2

Schnittpunkte von mehr als zwei Geraden kann also die Anzahl der Schnittpunkte verringert werden.

Ausgehend von einer Konfiguration mit genau 15 Schnittpunkten erhält man so Konfigurationen mit genau 14 bis genau 5 Schnittpunkten, siehe Abbildung 2. Hinzu kommen dann noch die beiden Möglichkeiten $n = 0$ und $n = 1$. Die Fälle $n = 2$, $n = 3$ und $n = 4$ sind noch offen. Hier kann man beweisen, dass die Anzahlen 2, 3 und 4 nicht möglich sind.

Diese Beweise werden von den Schülern aber nicht erwartet.

Klassenstufe 8

Teil a) Für die *Konstruktionszeichnung* siehe Abbildung 1.

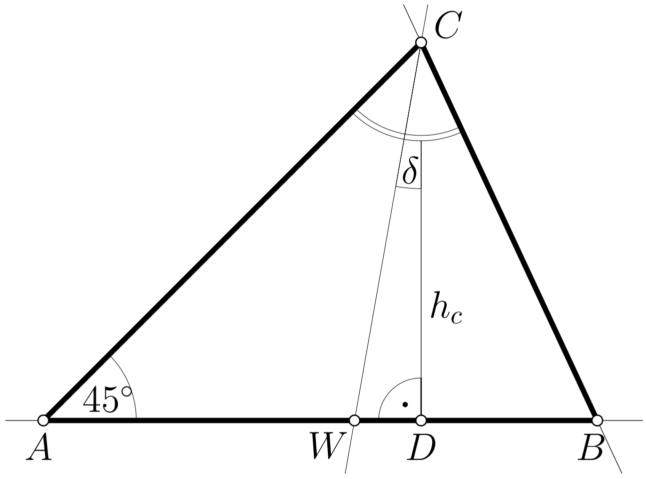


Abbildung 1

Konstruktionsbeschreibung:

(K1) Man konstruiert ein Dreieck ADC aus $|CD| = h_c = 5\,\text{cm}$, $|\sphericalangle DAC| = \alpha = 45°$ und $|\sphericalangle CDA| = 90°$.

(K2) Durch Abtragen des gegebenen Winkels der Größe $\delta = 10°$ konstruiert man einen Punkt W auf der Strecke $\overline{AD}$ derart, dass $|\sphericalangle WCD| = \delta = 10°$ gilt.

(K3) Man konstruiert den Schnittpunkt B der Geraden AD mit dem Spiegelbild der Geraden AC bei Spiegelung an der Geraden CW.

Teil b) Man kann auch einen Punkt W' mit folgenden Eigenschaften konstruieren: Der Punkt W' liegt auf der Geraden AD und es gilt $|\sphericalangle DCW'| = \delta = 10°$. Als Schnittpunkt der Geraden AD mit dem Spiegelbild der Geraden AC bei Spiegelung an der Geraden CW' erhält man dann einen Punkt B', siehe Abbildung 2.

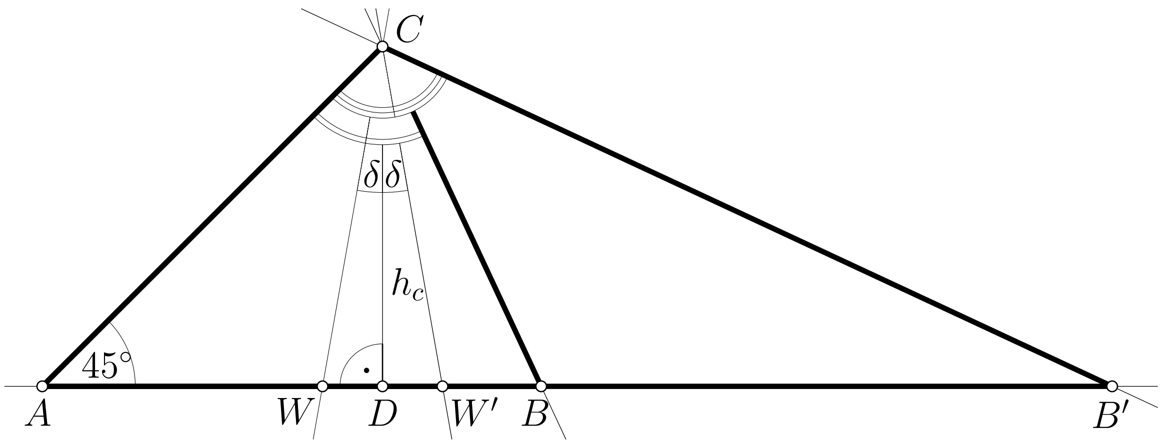


Abbildung 2

Auch das Dreieck $AB'C$ besitzt dann die geforderten Eigenschaften (1), (2) und (3). Weil das Dreieck ABC echt im Dreieck $AB'C$ enthalten ist, sind die Dreiecke wegen des verschiedenen Flächeninhalts nicht kongruent zueinander.

Teil c) I. Wir untersuchen zuerst, welche Bedingungen *notwendig* für die Existenz zweier zueinander nicht kongruenter Dreiecke mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) sind.

Es sei dazu ABC ein beliebiges Dreieck mit den Eigenschaften (1), (2) und (3). Dann ist der Punkt D durch die Bedingung (2) als Fußpunkt des Lotes von C auf die Gerade AB eindeutig festgelegt und nach dem Innenwinkelsatz und wegen (1) und (2) gilt

$$|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle DAC| = 45^\circ\,, \tag{4}$$
$$|\sphericalangle CDA| = 90^\circ\,, \tag{5}$$
$$|CD| = 5\,\mathrm{cm}\,. \tag{6}$$

Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_γ mit der Geraden AB wird mit W bezeichnet. Der Punkt W liegt dann im Winkel ACB und daher im Innern der Strecke $\overline{AB}$. Da nach (3) der Winkel zwischen der Winkelhalbierenden $w_\gamma = CW$ und der Höhe CD die Größe $\delta > 0^\circ$ hat, sind W und D voneinander verschieden. Es kann daher nur eine der beiden folgenden Aussagen gelten:

Der Schnittpunkt W der Geraden w_γ und AB liegt im Innern der Strecke $\overline{AD}$. (7)

Der Schnittpunkt W der Geraden w_γ und AB liegt außerhalb der Strecke $\overline{AD}$. (8)

Da $w_\gamma = CW$ die Winkelhalbierende des Winkels ACB ist, ist B der Schnittpunkt der Geraden AD mit dem Spiegelbild der Geraden AC bei Spiegelung an der Geraden CW.

Wenn es also zwei nicht zueinander kongruente Dreiecke mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) gibt, dann muss es auf Grund der Eindeutigkeit der Winkelantragung des Winkels mit der Größe δ an den Strahl $\overrightarrow{CD}$ ein Dreieck geben, welches zusätzlich die Eigenschaft (7) hat, und ein anderes Dreieck, welches zusätzlich die Eigenschaft (8) hat.

Die Größe δ muss daher so sein, dass ein Dreieck ABC mit den Eigenschaften (1), (2), (3) und (7) und ein Dreieck ABC mit den Eigenschaften (1), (2), (3) und (8) existiert.

Es gelte (7). Aus (3), (4) und (7) folgt $0^\circ < \delta < 45^\circ$.

Es gelte (8). Wegen Eigenschaft (3) gilt einerseits $|\sphericalangle ACB| = 2\cdot(|\sphericalangle ACD| + \delta) = 90° + 2\delta$ und wegen des Innenwinkelsatzes sowie Eigenschaft (1) gilt andererseits $|\sphericalangle ACB| < 180° - |\sphericalangle BAC| < 135°$. Aus den beiden Beziehungen ergibt sich $90° + 2\delta = 135°$ und daraus folgt $0° < \delta < 22{,}5°$.

Zusammenfassend gilt: Wenn es zwei zueinander nicht kongruente Dreiecke mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) gibt, dann gilt

$$0° < \delta < 22{,}5°\,. \tag{9}$$

Die Beziehung (9) ist also eine notwendige Bedingung.

II. Wir zeigen nun, dass die Bedingung (9) auch hinreichend für die Existenz zweier zueinander nicht kongruenter Dreiecke ABC mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) ist.

Fall 1: Wir zeigen die Existenz eines Dreiecks ABC mit den Eigenschaften (1), (2), (3) und (7). Durch Konstruktion folgt die Existenz eines Dreiecks ADC mit den Eigenschaften (4), (5) und (6). Wegen (4) und (9) existiert ein Punkt W im Innern der Strecke $\overline{AD}$ mit

$$|\sphericalangle WCD| = \delta\,, \tag{10}$$

siehe Abbildung 3.

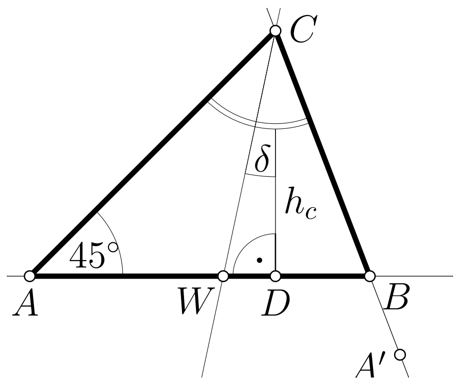


Abbildung 3

Es sei A' das Spiegelbild von A bei Spiegelung an der Geraden CW. Wegen (4) und (10) gilt $|\sphericalangle ACA'| = 2\cdot(45° - \delta)$. Hieraus und aus (9) folgt $|\sphericalangle DCA'| < 2\cdot 45° - 45° < 90°$ und $|\sphericalangle DCA'| > 2\cdot(45° - 22{,}5°) - 45° = 0°$. Wegen (5) schneiden sich die Geraden $A'C$ und AD daher in einem eindeutig bestimmten Punkt B derart, dass D zwischen A und B liegt. Wegen (4) gilt (1). Wegen (5) und (6) gilt (2). Nach Konstruktion ist $w_\gamma = CW$ die Winkelhalbierende des Winkels ACA' und daher auch des Winkels ACB. Wegen (10) ist (3) erfüllt. Zudem liegt W im Innern von $\overline{AD}$. Das Dreieck ABC besitzt also die Eigenschaften (1), (2), (3) und (8).

Fall 2: Wir zeigen die Existenz eines Dreiecks ABC mit den Eigenschaften (1), (2), (3) und (8). Wie im Fall 1 erhält man die Existenz eines Dreiecks ADC mit den Eigenschaften (4), (5) und (6). Wegen (5) und (9) existiert ein Punkt W auf der Geraden AD mit

$$|\sphericalangle DCW| = \delta\,, \tag{11}$$

welcher außerhalb der Strecke $\overline{AD}$ liegt, siehe Abbildung 4.

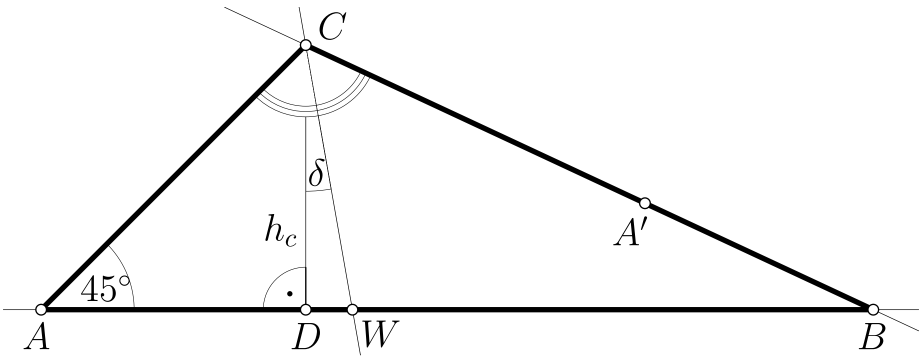


Abbildung 4

Es sei A' das Spiegelbild von A bei Spiegelung an der Geraden CW. Wegen (4), (11) und (9) gilt

$$|\sphericalangle DCA'| = |\sphericalangle ACA'| - 45^\circ = 2\cdot(45^\circ+\delta) - 45^\circ = 2\delta + 45^\circ < 90^\circ\,.$$

Daher schneiden sich die Geraden AD und $A'C$ in einem eindeutig bestimmten Punkt B und der Punkt W liegt zwischen den Punkten D und B auf der Geraden AB. Wie im Fall 1 bemerkt man, dass das Dreieck ABC nun die Eigenschaften (1), (2), (3) und (8) besitzt.

Die Bedingung (9) ist folglich hinreichend für die Existenz zweier Dreiecke ABC mit den Eigenschaften (1), (2) und (3). Da das Dreieck mit der Eigenschaft (7) echt im Dreieck mit der Eigenschaft (8) enthalten ist, sind die Dreiecke wegen des verschiedenen Flächeninhalts nicht zueinander kongruent.

Aus I. und II. folgt, dass die Bedingung (9) hinreichend und notwendig für die Existenz zweier zueinander nicht kongruenter Dreiecke ABC mit den Eigenschaften (1), (2), (3) ist.

Klassenstufe 9

Teil a) Der Würfel erhält unten $u = 17$, oben $o = 0$, rechts $r = 8$, links $l = 10$, vorne $v = 12$ und hinten $h = 11$. In der Tat ergeben sich die ersten 12 natürlichen Zahlen als Differenzen benachbarter Felder.

Teil b) Wir können den Würfel so drehen, dass die größte Differenz d zwischen der oberen und unteren Seite auftritt und dass die obere Seite von der unteren subtrahiert wird. Die Bezeichnungen der Zahlen auf den Seiten mit Variablennamen übernehmen wir aus Teil a).

Dann gilt

$$\begin{aligned}
4\,d &= 4\,(u-o)\\
&= (u-r+r-o)+(u-l+l-o)+(u-v+v-o)+(u-h+h-o)\\
&\leq |u-r|+|r-o|+|u-l|+|l-o|+|u-v|+|v-o|+|u-h|+|h-o|\\
&\leq 5+6+7+8+9+10+11+12 = 4\cdot 17\,.
\end{aligned}$$

Also ist $d \leq 17$. Dass Gleichheit möglich ist, zeigt das Beispiel aus Teil a).

Hinweis: Im letzten Schritt dieser Ungleichungskette wird verwendet, dass die acht addierten Differenzen irgendwelche der Zahlen 1 bis 12 sind und diese Summe nicht größer als die Summe der acht größten dieser 12 Zahlen sein kann.

Klassenstufe 10

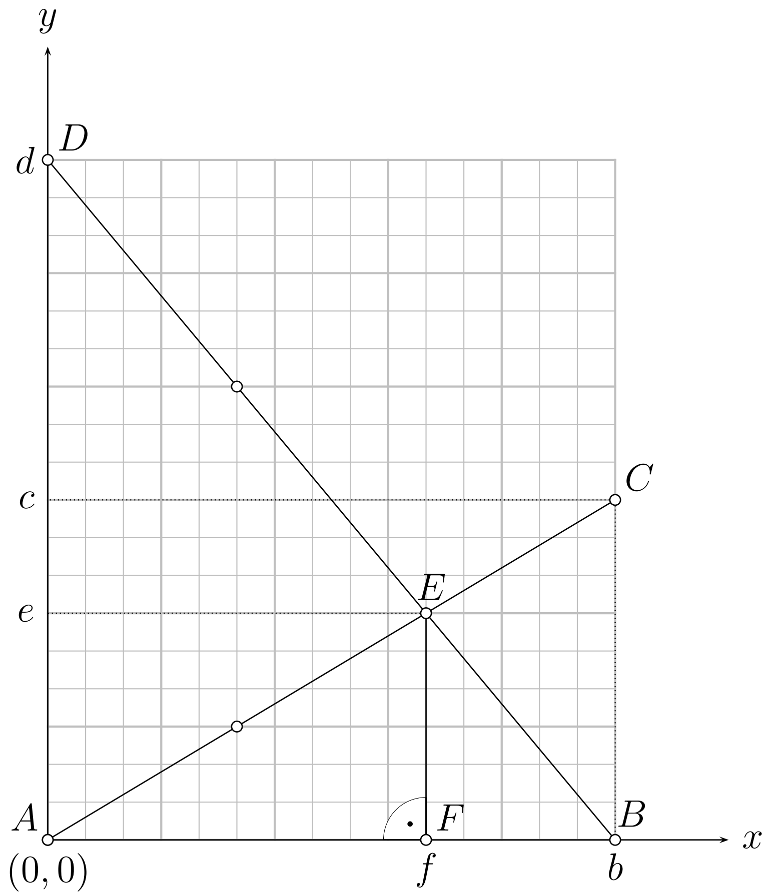


Abbildung 1

Teil a) Die Gerade AC verläuft durch den Koordinatenursprung und hat den Anstieg $m = \frac{c}{b} = \frac{3}{5}$. Die Gerade AC hat somit die Gleichung $y = \frac{3}{5}x$. Die Gerade BD schneidet die y-Achse im Punkt D und hat damit den y-Achsenabschnitt 6.

Diese Gerade hat den Anstieg $m = -\frac{d}{b} = -\frac{6}{5}$ und somit die Gleichung $y = -\frac{6}{5}x + 6$. Gleichsetzen beider Geradengleichungen und Lösen liefert $x = \frac{10}{3}$ und $y = 2$ für die Koordinaten des Schnittpunkts E dieser beiden Geraden. Die Länge der Strecke $\overline{EF}$ ist daher gleich 2.

Teil b) Das Dreieck ABC ist ähnlich dem Dreieck AFE, Dreieck BEF ist ähnlich dem Dreieck BDA und Dreieck EBC ist ähnlich dem Dreieck EDA. Außerdem ist noch das Dreieck FBC ähnlich dem Dreieck FDA.

Teil c) Im Folgenden seien f und e die Koordinaten des Punktes E, also $E(f, e)$. Wegen $|AF| = f$ ergibt sich $|FB| = b - f$. Es gilt nach dem Strahlensatz

$$\frac{|AF|}{|AB|} = \frac{|EF|}{|BC|}, \text{ also } \frac{f}{b} = \frac{e}{c}, \text{ sowie } \frac{|BF|}{|BA|} = \frac{|EF|}{|AD|}, \text{ also } \frac{b-f}{b} = \frac{e}{d}$$

und damit $1 - \frac{f}{b} = \frac{e}{d}$. Daraus folgt unmittelbar

$$1 - \frac{e}{c} = \frac{e}{d}\,.$$

Multiplikation mit c und d liefert

$$c \cdot d - e \cdot d = e \cdot c, \text{ weiter } c \cdot d = e \cdot c + e \cdot d = e \cdot (c + d),$$

und daraus folgt die Behauptung

$$e = \frac{c \cdot d}{c + d}\,.$$

Klassenstufen 11–13

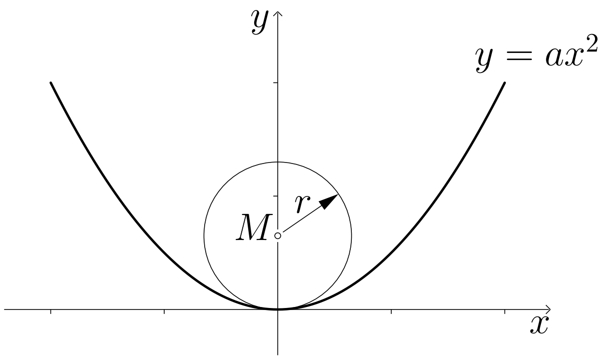


Abbildung 1

In einem Längsschnitt, vgl. Abbildung 1, werden ein Kreis und eine Parabel betrachtet. Ein Koordinatensystem wird mit seinem Ursprung im Scheitelpunkt der Parabel gewählt. Die Parabel hat die Gleichung

$$y = ax^2\,.$$

Der Radius des Kreises sei r. Damit der Kreis die Parabel im Scheitelpunkt berührt, muss seine Gleichung

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2$$

sein.

Betrachtet werden die Schnittpunkte und Berührungspunkte von Parabel und Kreis. Aus der Kreisgleichung folgt

$$x^2 = -y^2 + 2yr\,.$$

Eingesetzt in die Parabelgleichung ergibt sich

$$y = -ay^2 + 2ayr\,.$$

Das ist äquivalent zu

$$y = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{2ar - 1}{a}\,.$$

Aus $y = 0$ folgt $x = 0$, diese Lösung ist der gewünschte Berührungspunkt.

Durch erneutes Einsetzen der zweiten Lösung in die Parabelgleichung findet man

$$\frac{2ar-1}{a} = ax^2 \text{ und}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2ar-1}{a^2}}\,.$$

Diese Werte für x sind nach der Struktur der Gleichungen offensichtlich Lösungen sowohl für die Parabel- als auch die Kreisgleichung.

Damit der Kreis die Parabel genau einmal berührt und darüber hinaus nirgendwo schneidet, darf es keine Lösungen mit $x \neq 0$ geben. (Abbildung 2 veranschaulicht die Notwendigkeit dieser Bedingung.) Daher gilt

$$r \leq \frac{1}{2a}\,. \tag{12}$$

Genau dann, wenn der Kreis durch den Scheitelpunkt der Parabel verläuft und für seinen Radius die Ungleichung (12) gilt, hat er mit der Parabel keinen weiteren Punkt gemeinsam.

Damit sind die möglichen Radien der Eiskugel gefunden.

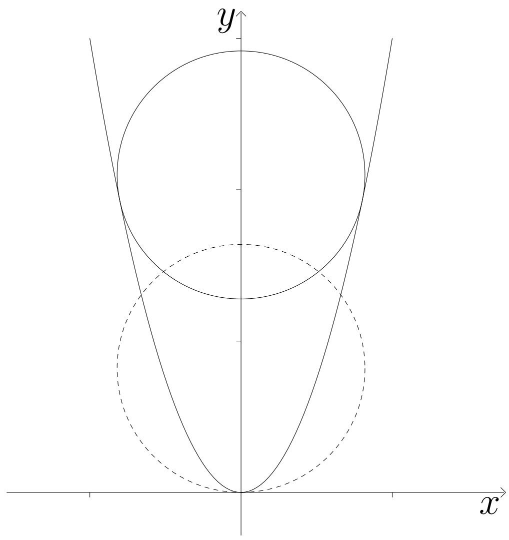


Abbildung 2
Hier sind die Augen größer als der Magen.