BUNDESWEITE MATHEMATIK-WETTBEWERBE
Bildung & Begabung

MO-Tage

Serie 2 – Lösungen

Klassenstufe 3

a) Eine mögliche Lösung:

20	45	10
15	25	35
40	5	30

b) Eine mögliche Lösung:

24	54	12
18	30	42
48	6	36

Die Magische Summe ist 90.

Man kann diese magischen Quadrate erhalten, indem man im Beispielquadrat aus der Aufgabenstellung jede Zahl mit 5 (für Teil a)) bzw. mit 6 (für Teil b)) multipliziert.

Klassenstufe 4

Teil a) Mögliche Lösung: $654 - 312 = 342$.

Teil b) Mögliche Lösungen: $642 - 531 = 111$ oder $462 - 351 = 111$.

Teil c) Lösungen: $512 - 463 = 49$ und $412 - 365 = 47$ und $314 - 265 = 49$.

Klassenstufe 5

Aus (4) folgt: **Leon** trinkt die **heiße Schokolade** und hat den **Windbeutel** bestellt.

Aus (2) folgt: **Elisabeth** hat sich **Wasser** bestellt.

Aus (1) folgt, dass Mara keine Cola bestellt hat.

Als letzte verbleibende Möglichkeit folgt hieraus: **Konrad** erhält die **Cola** und **Mara** den **Apfelsaft**.

Hieraus und mit (3) ergibt sich jetzt: **Mara** bekommt den **Streuselkuchen**.

Weil Elisabeth das Wasser bestellt hat, kann sie wegen (5) nicht die Nusstorte haben.

Weil Leon den Windbeutel und Mara den Streuselkuchen bestellt haben, folgt als letzte verbleibende Möglichkeit: **Konrad** erhält die **Nusstorte** und **Elisabeth** erhält den **Pfannkuchen**.

Die Kellnerin verteilt die Bestellung folgendermaßen an die Kinder:

Leon	heiße Schokolade	Windbeutel
Elisabeth	Wasser	Pfannkuchen
Konrad	Cola	Nusstorte
Mara	Apfelsaft	Streuselkuchen

Klassenstufe 6

Teil a) In den zwölf eingesparten Läufen hätte Jens $(12 \cdot 3 =)\, 36$ Bretter getragen. Diese 36 Bretter hätte er mit den übrigen Läufen transportieren müssen – und zwar je Lauf ein Brett.

Folglich wäre er mit je 4 Brettern genau 36-mal gelaufen und hätte $(36 \cdot 4 =)\, 144$ Bretter getragen.

Probe:

Wenn Jens jeweils 3 Bretter trägt, dann muss er $(144 : 3 =)\, 48$-mal laufen.

Wenn Jens jeweils 4 Bretter trägt, dann muss er $(144 : 4 =)\, 36$-mal laufen.

Wegen $48 - 36 = 12$ hätte er tatsächlich 12-mal weniger laufen müssen.

Teil b) Die stets übrig bleibende Platte bleibt zunächst außer Acht. Dann muss die Anzahl der verbliebenen Platten durch 4, 6 und 8 teilbar sein. Das trifft für genau die Zahlen zu, die Vielfache von 24 sind. Zwischen 50 und 100 gibt es die Vielfachen $(24 \cdot 3 =)\, 72$ und $(24 \cdot 4 =)\, 96$.

Nun wird die Platte dazugezählt, die stets übrig bleibt.

Folglich sind 73 und 97 als Anzahlen für die Gehwegplatten möglich.

Teil c) Das Mischungsverhältnis sagt aus, dass man aus 2 kg Mörtelpulver und 3 kg Wasser 5 kg Mörtel erhält. Gebraucht werden aber 25 kg, und das sind fünfmal so viel wie 5 kg. Folglich werden $(5 \cdot 2\,\text{kg} =)$ 10 kg Mörtelpulver und $(5 \cdot 3\,\text{kg} =)$ 15 kg Wasser benötigt, um 25 kg Mörtel herzustellen.

Klassenstufe 7

Wir bezeichnen mit x die Maßzahl des in Litern gemessenen Fassungsvermögens der Wanne. Aus (1) und (2) folgt dann: In den Eimer passen $\frac{5}{14} \cdot x$ Liter, in die Gießkanne $\frac{4}{21} \cdot x$ Liter.

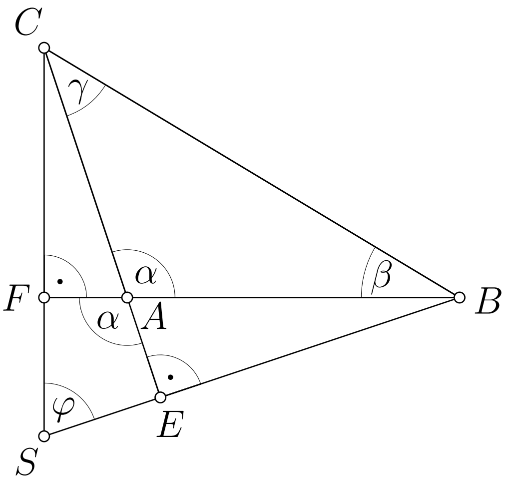
Wegen

$$\frac{5}{14} \cdot x - \frac{4}{21} \cdot x = \frac{15}{42} \cdot x - \frac{8}{42} \cdot x = \frac{7}{42} \cdot x = \frac{1}{6} \cdot x$$

folgt daraus, dass in den Eimer insgesamt $\frac{1}{6} \cdot x$ Liter Wasser mehr hineinpasst als in die Gießkanne. Hieraus und aus (3) folgt $\frac{1}{6} \cdot x = 3{,}5$ und daher $x = 21$. Daraus lassen sich nun die einzelnen Fassungsvermögen der Gefäße ermitteln:

Die Wanne fasst 21 Liter Wasser, der Eimer $(\frac{5}{14} \cdot 21 =)$ 7,5 Liter und die Gießkanne $(\frac{4}{21} \cdot 21 =)$ 4 Liter.

Klassenstufe 8



Die Größen der Innenwinkel $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CBA$ und $\sphericalangle ACB$ seien wie üblich mit α, β und γ bezeichnet; der Winkel $\sphericalangle BSC$ habe die Größe φ, siehe Abbildung. Das Viereck $SEAF$ hat mit den Winkeln $\sphericalangle AES$ und $\sphericalangle SFA$ zwei rechte Winkel, da die Geraden AB und CF sowie AC und BE senkrecht aufeinander stehen. Da das Dreieck ABC nach Voraussetzung stumpfwinklig ist, liegt der Punkt A zwischen den Punkten C und E und zwischen den Punkten B und F. Nach dem Scheitelwinkelsatz gilt daher

$|\sphericalangle FAE| = \alpha$. Somit gilt $\alpha + 90° + \varphi + 90° = 360°$
und daher

$$\varphi = 180° - \alpha\,. \tag{1}$$

Nach dem Innenwinkelsatz im Dreieck ABC gilt $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, also

$$\beta + \gamma = 180° - \alpha\,. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $\varphi = \beta + \gamma$. Die Größe φ des Winkels $\sphericalangle BSC$ ist also tatsächlich gleich der Summe aus den Größen β und γ der beiden spitzen Innenwinkel $\sphericalangle CBA$ und $\sphericalangle ACB$ des Dreiecks ABC.

Bemerkung: Man kann beweisen, dass die entsprechende Aussage auch für spitzwinklige Dreiecke ABC gilt.

Klassenstufe 9

Wir betrachten zunächst den Test mit der gesendeten Signalkombination $(R, G, B) = (1, 0, 0)$. In der folgenden Tabelle sind in der ersten Spalte alle Fehlerkombinationen der Leitungspaare RG, RB und GB erfasst, wobei 0 für Fehlerfreiheit steht, in der zweiten Spalte ist für jede Fehlerkombination die ankommende Signalkombination (r, g, b) angegeben, in der dritten wird zur Erleichterung der Übersicht jeder ankommenden Signalkombination als Binärzahl ihr Dezimalwert zugeordnet.

RG	RB	GB	r	g	b	Fall
0	0	0	1	0	0	4
0	0	1	1	0	0	4
0	0	2	1	0	0	4
0	1	0	0	0	1	1
0	1	2	0	0	1	1
0	2	0	1	0	1	5
0	2	1	1	1	0	6
1	0	0	0	1	0	2
1	0	2	0	1	0	2
1	2	0	0	1	1	3
2	0	0	1	1	0	6
2	0	1	1	0	1	5
2	1	0	0	1	1	3

Es ist nun zu zeigen, dass in jedem der sechs Fälle ein weiterer Test genügt, um die Fehlerbestimmung abzuschließen. Wir zeigen, dass es sogar (mindestens) einen weiteren Test gibt, der für alle Fälle genügt, nämlich den Test mit der Signalkombination $(R, G, B) = (0, 1, 0)$. Dafür legen wir eine entsprechend aufgebaute Tabelle für diese gesendete Kombination an, in der die Fälle der ersten aufsteigend sortiert sind:

RG	RB	GB	r	g	b	Fall aus Test 1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	2	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	2
1	0	2	1	0	1	2
1	2	0	1	0	0	3
2	1	0	0	1	1	3
0	0	0	0	1	0	4
0	0	1	0	0	1	4
0	0	2	0	1	1	4
0	2	0	0	1	0	5
2	0	1	1	0	1	5
0	2	1	0	0	1	6
2	0	0	1	1	0	6

Die Tabelle zeigt, dass im Test 2 für keinen der sechs Fälle von Test 1 bei zwei Fehlerkombinationen dieselbe Signalkombination ankommt. In jedem möglichen Fall genügen also diese beiden Tests:

Die Eingabe von $(1, 0, 0)$ liefert die Fallnummer - erste Tabelle. Gibt man danach $(0, 1, 0)$ ein, kann man anhand der zweiten Tabelle die betroffenen Leitungen sowie die jeweiligen Fehler ablesen.

Klassenstufe 10

Auf jedem Teilstück gilt für den Weg s, die Zeit t und die Geschwindigkeit v die Gleichung $v = \frac{s}{t}$, daraus folgen $s = v \cdot t$ und $t = \frac{s}{v}$. Es seien $x\,\mathrm{km}$ die Länge der ebenen Strecke und $y\,\mathrm{km}$ die Länge der Strecke mit Steigung. Die gesuchte Gesamtlänge in Kilometern beträgt dann $l = 2\,(x + y)$.

Der im Endspurt zurückgelegte Weg hat eine Länge von $\frac{12}{60} \cdot 30 = 6$ Kilometern. Die Gesamtzeit $5 - \frac{12}{60} = 4{,}8$ Stunden des restlichen Weges ergibt sich als Summe von Zeiten für die ersten Abschnitte:

$$4{,}8 = \frac{x}{20} + \frac{y}{15} + \frac{y}{30} + \frac{x-6}{20} = \frac{2x}{20} + \frac{3y}{30} - \frac{3}{10}\,,$$

also

$$\frac{x}{10} + \frac{y}{10} = 4{,}8 + 0{,}3\,,$$
$$x + y = 51$$

und damit

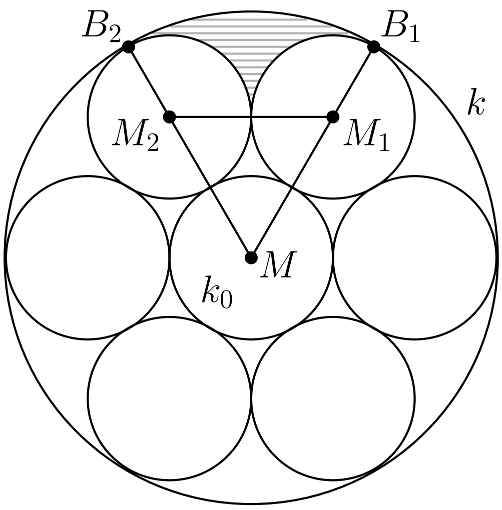
$$l = 2\,(x+y) = 102\,.$$

Velo Flitzeped ist also 102 km unterwegs.

Klassenstufen 11–13

Der Radius des großen Kreises k beträgt $3r$, sein Mittelpunkt sei M.

Die Punkte M_1 und M_2 seien die Mittelpunkte zweier kleiner Kreise, die den Kreis k_0 von außen und sich gegenseitig berühren. Die Kreise um die Punkte M_1 und M_2 berühren den Kreis k in den Punkten B_1 bzw. B_2.



Das Dreieck MM_1M_2 ist gleichseitig mit der Seitenlänge $2r$. Da $|\sphericalangle B_1MB_2| = 60°$ ist, wird durch die Strecken $\overline{MB_1}$ und $\overline{MB_2}$ ein Sechstel des Kreises k ausgeschnitten.

Da $|\sphericalangle M_2M_1M| = 60°$ gilt, ist $|\sphericalangle B_1M_1M_2| = 120°$. Somit schneiden die Strecken $\overline{M_1B_1}$ und $\overline{M_1M_2}$ ein Drittel der Fläche des kleinen Kreises um den Punkt M_1 aus.

Analog wird durch die Strecken $\overline{M_2B_2}$ und $\overline{M_2M_1}$ ein Drittel des kleinen Kreises um den Punkt M_2 ausgeschnitten.

Der gesuchte Flächeninhalt A lässt sich durch die Flächeninhalte der Kreise k und k_0 sowie des Dreiecks MM_1M_2 wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{6}\mathrm{A}_k - \mathrm{A}_{\triangle\, MM_1M_2} - 2\cdot\frac{1}{3}\mathrm{A}_{k_0} \\
&= \frac{1}{6}\pi\left(3r\right)^2 - \sqrt{3}\,r^2 - \frac{2}{3}\pi r^2 \\
&= \left(\frac{5}{6}\pi r^2 - \sqrt{3}\,r^2\right) = \left(\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right) r^2.
\end{aligned}$$