BUNDESWEITE MATHEMATIK-WETTBEWERBE
Bildung & Begabung

MO-Tage

Die neuen MO-Tage sind MO-ntag und MO-nnerstag.

Liebe Schülerinnen und Schüler,

die aktuelle Corona-Krise beschäftigt auch uns Mathe-Fans. Damit ihr während dieser schweren Zeit nicht auf mathematische Herausforderungen verzichten müsst, haben wir, der Verein Mathematik-Olympiaden e.V. und das Talentförderzentrum Bildung & Begabung, die MO-Tage ins Leben gerufen.
Ab sofort veröffentlichen wir zweimal pro Woche ein Aufgabenblatt mit kniffligen Aufgaben aus den Mathematik-Olympiaden der vergangenen Jahre – jeden MO-ntag und MO-nnerstag. Pro Klassenstufe gibt es eine Aufgabe, sodass jede und jeder die eigene Schwierigkeitsstufe für sich selbst wählen kann. Zusätzlich zu dem Aufgabenblatt veröffentlichen wir außerdem ein Lösungsblatt zum letzten Aufgabenblatt.
Viel Spaß!

Serie 3 – Aufgaben

Die Lösungen werden am 06.04.2020 veröffentlicht.

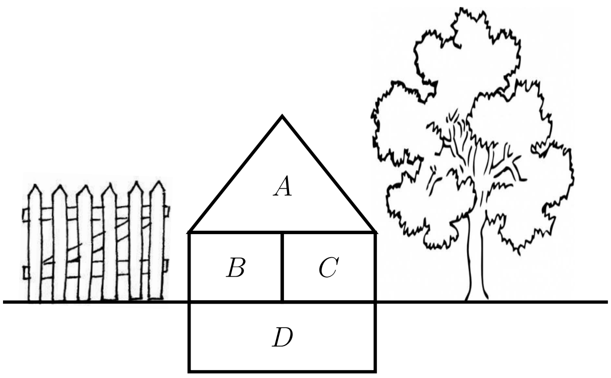
Klassenstufe 3

Frau Gabel, Herr Messer und Herr Löffel sind Köche in verschiedenen Restaurants einer Stadt.

– Herr Löffel arbeitet nicht im Restaurant „Zur Kastanie“.
– Die Tomatensuppe gibt es im Restaurant „Zur Eiche“.
– Frau Gabel kocht nicht im Restaurant „Zur Kastanie“ und nicht im Restaurant „Zur Eiche“.
– Herr Messer und Herr Löffel kochen keine Kartoffelsuppe.
– Einer der Köche stellt eine Kürbissuppe her.
– Das dritte Restaurant heißt „Zur Linde“.

In welchem Restaurant wird welche Suppe von welchem Koch gekocht?

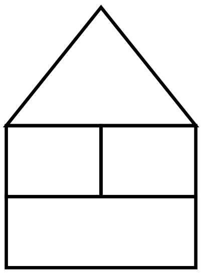
Klassenstufe 4



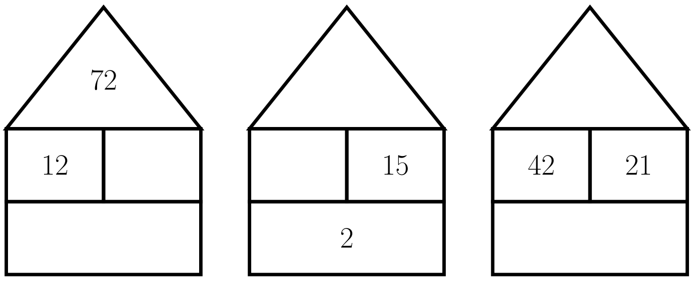
Das Zahlenhaus hat ein Dachzimmer A, ein Erdgeschoss mit den Zimmern B und C und einen Keller D. Die Zahl im Zimmer B ist das Doppelte der Zahl in Zimmer C.

Multipliziere ich die Zahlen in B und C miteinander, erhalte ich die Zahl im Dachzimmer. Dividiere ich diese Zahlen, erhalte ich die Zahl im Keller.

a) Setze im Zimmer C eine 2, 3 oder 4 ein und ergänze die übrigen Zahlen nach der Vorschrift.



b) Ergänze die fehlenden Zahlen in den drei Zahlenhäusern nach der Vorschrift.



Klassenstufe 5

Rudolf fährt gern Rad und ist gerade dabei, eine Rundreise zu planen. Er wohnt im Ort A und möchte die Orte B, C, D genau einmal durchfahren und dann wieder zurück in seinen Heimatort radeln. Die Orte A, B, C und D sind durch Radwege wie in Abbildung 1 miteinander verbunden.

Eine mögliche Route wäre A – B – D – C – A.

a) Gib alle möglichen Rundreisen in dieser Schreibweise an.

b) Welche Rundreisen sind ausgehend von A möglich, wenn noch ein Ort E hinzukommt und die einzelnen Orte in der Art, wie in Abbildung 2 dargestellt, durch Radwege miteinander verbunden sind? Gib wieder alle möglichen Rundreisen an.

c) Die Orte A, B, C, D und E sollen nun wie in Abbildung 3 dargestellt ein Fünfeck bilden. Alle Orte sind wieder durch Radwege miteinander verbunden. Wie viele Rundreisen sind nunmehr möglich?

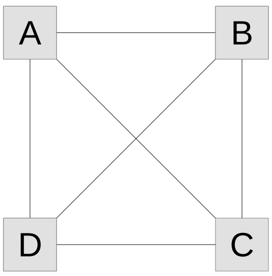


Abbildung 1

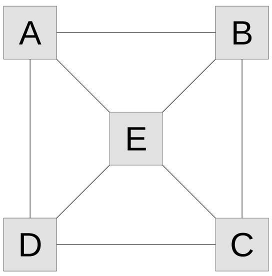


Abbildung 2

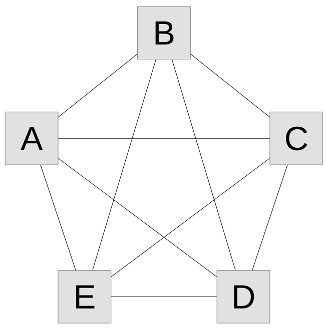


Abbildung 3

Klassenstufe 6

In Deutschland gibt es Münzen mit acht verschiedenen Werten:

1 ct, 2 ct, 5 ct, 10 ct, 20 ct, 50 ct, 1 €, 2 €.

Karl soll sich von jeder dieser acht Münzen eine bestimmte Anzahl nehmen, mindestens eine und höchstens acht. Alle diese Anzahlen müssen verschieden sein.

Zum Beispiel könnte er zwei 1-ct-, sieben 2-ct-, fünf 5-ct-, eine 10-ct-, acht 20-ct-, vier 50-ct-, sechs 1-€- und dann drei 2-€-Münzen nehmen und hat dann einen Geldbetrag von $16,11$ €.

a) Ermittle den größten und den kleinsten Geldbetrag, den Karl auf diese Weise erhalten kann, und gib jeweils die Anzahl der einzelnen Münzen an.

b) Kann man die Verteilung der Münzen auch so vornehmen, dass man einen Cent mehr als den kleinsten Geldbetrag erhält?
Kann man die Verteilung der Münzen auch so wählen, dass man einen Cent weniger als den größten Geldbetrag erhält?

c) Kann man auch zwei Cent mehr als den kleinsten Geldbetrag oder zwei Cent weniger als den größten Geldbetrag erhalten?

Klassenstufe 7

Von einem Viereck $ABCD$ ist bekannt:

(1) Die Gerade AC ist eine Symmetrieachse des Vierecks $ABCD$.

(2) Die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ verlaufen durch das Innere des Vierecks $ABCD$ und sind gleich lang.

(3) Die Seite $\overline{AB}$ und die Diagonale $\overline{AC}$ sind gleich lang.

Ermittle die Größen der vier Innenwinkel des Vierecks $ABCD$.

Hinweis: Alle gesuchten Größen sind mit geometrischen Argumenten exakt zu bestimmen. Messungen mit Lineal oder Geodreieck sind dafür nicht zulässig, da diese niemals exakt sind.

Klassenstufe 8

Eine Strecke, deren Endpunkte auf einem Kreis liegen, bezeichnet man als *Sehne* dieses Kreises. Ein Viereck $ABCD$, dessen Eckpunkte in der Reihenfolge A, B, C, D auf einem Kreis liegen, heißt *Sehnenviereck*.

a) Die Punkte A, B, C und D mit den Koordinaten (6,0), (10,2), (10,8) und (3,1) sind Eckpunkte eines Sehnenvierecks.
Trage diese Punkte in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein und konstruiere einen Kreis, auf dem alle vier Punkte liegen.
Beschreibe, wie du den Kreismittelpunkt konstruiert hast, und gib seine Koordinaten an.

b) Zeichne drei verschieden große Kreise und in jeden dieser Kreise ein Sehnenviereck. Miss die Größen aller Innenwinkel der Vierecke und bilde jeweils von zwei gegenüberliegenden Innenwinkeln die Summe ihrer Größen.
Welche Vermutung kann man aus diesen Beispielen ableiten?

c) Beweise deine Vermutung für den Fall, dass der Mittelpunkt des Umkreises im Inneren des Sehnenvierecks liegt.

Klassenstufe 9

Ein Dreieck wurde vollständig in Vierecke zerlegt. Die Eckpunkte dieser Vierecke sind somit die drei Eckpunkte des Dreiecks, Punkte auf den Seiten des Dreiecks sowie Punkte im Inneren des Dreiecks. Auf dem Rand jedes dieser Vierecke liegen genau vier dieser Eckpunkte. Zerlegungen mit „verkappten“ Fünf- oder anderen Vielecken sind nicht zugelassen.

a) Beweisen Sie: Wenn ein Dreieck in n Vierecke zerlegt wurde und wenn i Punkte im Inneren des Dreiecks, r Punkte auf den Seiten des Dreiecks sowie die drei Eckpunkte des Dreiecks sämtliche Eckpunkte dieser Vierecke sind, dann gilt

$$n = i + \frac{r+1}{2}.$$

b) Wir bezeichnen ein Viereck als *konkav*, wenn es einen Innenwinkel besitzt, der größer als 180° ist.
Untersuchen Sie, ob es möglich ist, ein Dreieck in eine endliche Anzahl nur von konkaven Vierecken zu zerlegen.

Klassenstufe 10

Mario und Luigi sind mit dem Auto unterwegs. Sie wechseln sich beim Fahren ab. Wenn Luigi am Steuer sitzt, fahren sie doppelt so schnell wie mit Mario am Steuer. Auf der Fahrt von Adorf nach Cedorf fährt jeder die Hälfte der Zeit. Auf dem Rückweg nehmen sie dieselbe Strecke, allerdings fährt diesmal jeder die Hälfte des Weges. Für die Rückfahrt brauchen sie genau eine Stunde länger als für die Hinfahrt.

Wie lange dauert die Hinfahrt?

Hinweis: Wir nehmen an, dass Mario und Luigi jeweils stets mit konstanter Geschwindigkeit fahren. Die Zeiten, die sie für Pausen und Fahrerwechsel benötigen, sollen vernachlässigt werden.

Klassenstufen 11–13

Man bestimme alle reellen Zahlen x, die die Gleichung

$$\sqrt{x^2+2x+1}+2\sqrt{x^2+6x+9}=\sqrt{x^2+4x+4}+3$$

erfüllen.