MO-Tage

Serie 3 – Lösungen

Klassenstufe 3

Die Namen der Restaurants und die Arten der Suppen sind den Aussagen zu entnehmen.
Aus der 3. Aussage folgt, dass Frau Gabel im Restaurant „Zur Linde“ kocht, und aus der 4. Aussage folgt, dass Frau Gabel Kartoffelsuppe kocht.
Aufgrund dieser Ergebnisse und der 1. Aussage arbeitet Herr Löffel im Restaurant „Zur Eiche“ und wegen der 2. Aussage kocht er Tomatensuppe.
Damit kocht Herr Messer im Restaurant „Zur Kastanie“ Kürbissuppe.
Das Ergebnis kann in Tabellenform wie folgt angegeben werden:

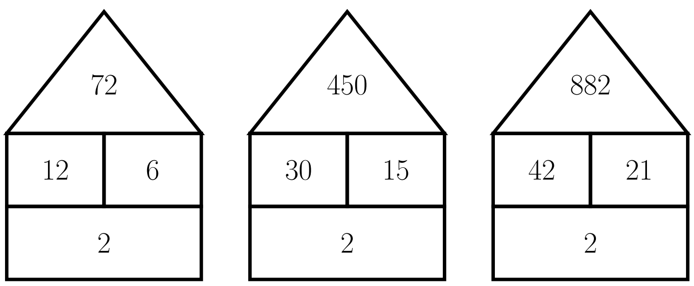
Koch	Frau Gabel	Herr Messer	Herr Löffel
Restaurant	*Zur Linde*	*Zur Kastanie*	*Zur Eiche*
Suppe	*Kartoffelsuppe*	*Kürbissuppe*	*Tomatensuppe*

Klassenstufe 4

Teil a)

C	B	A	D
2	4	8	2
3	6	18	2
4	8	32	2

Teil b)



Klassenstufe 5

Teil a) Folgende sechs Rundreisen sind möglich:

(1) A – B – D – C – A (vorgegeben)
(2) A – B – C – D – A
(3) A – C – B – D – A
(4) A – C – D – B – A
(5) A – D – B – C – A
(6) A – D – C – B – A

Teil b) Folgende acht Rundreisen sind möglich:

(1) A – B – C – D – E – A
(2) A – B – C – E – D – A
(3) A – B – E – C – D – A
(4) A – E – B – C – D – A
(5) A – E – D – C – B – A
(6) A – D – C – B – E – A
(7) A – D – C – E – B – A
(8) A – D – E – C – B – A

Teil c) Es gibt 24 mögliche Rundreisen.

Die Anzahl kann durch das systematische Aufschreiben von Rundreisen nach lexikografischer Sortierung bestimmt werden:

Man erhält zunächst für Rundreisen, die mit A – B beginnen, sechs Möglichkeiten:

(1) A – B – C – D – E – A
(2) A – B – C – E – D – A
(3) A – B – D – C – E – A
(4) A – B – D – E – C – A
(5) A – B – E – C – D – A
(6) A – B – E – D – C – A

Gleiches gilt für Rundreisen, die mit A – C, mit A – D oder mit A – E beginnen. Somit ergeben sich $(4 \cdot 6 =)$ 24 Möglichkeiten.

Auf diese Anzahl kann auch mittels kombinatorischer Überlegungen geschlossen werden: Die möglichen Rundreisen sind durch eine Zeichenkette der Länge sechs dargestellt. Für das erste und sechste Zeichen gibt es jeweils nur eine Möglichkeit. Für das zweite Zeichen sind es vier, für das dritte Zeichen drei, für das vierte Zeichen zwei und für das fünfte Zeichen eine Möglichkeit. Somit gibt es $(1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 =)$ 24 Möglichkeiten.

Klassenstufe 6

Teil a)

Größter Geldbetrag:

$$27{,}60\,€ = 1\cdot 1\,\text{ct} + 2\cdot 2\,\text{ct} + 3\cdot 5\,\text{ct} + 4\cdot 10\,\text{ct} + 5\cdot 20\,\text{ct} + 6\cdot 50\,\text{ct} + 7\cdot 1\,€ + 8\cdot 2\,€$$

Kleinster Geldbetrag:

$$7{,}32\,€ = 8\cdot 1\,\text{ct} + 7\cdot 2\,\text{ct} + 6\cdot 5\,\text{ct} + 5\cdot 10\,\text{ct} + 4\cdot 20\,\text{ct} + 3\cdot 50\,\text{ct} + 2\cdot 1\,€ + 1\cdot 2\,€$$

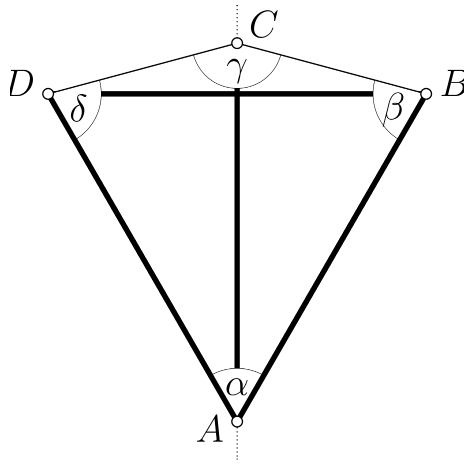
Teil b) Ja, beides ist möglich:

$$7{,}33\,€ = 7\cdot 1\,\text{ct} + 8\cdot 2\,\text{ct} + 6\cdot 5\,\text{ct} + 5\cdot 10\,\text{ct} + 4\cdot 20\,\text{ct} + 3\cdot 50\,\text{ct} + 2\cdot 1\,€ + 1\cdot 2\,€$$

$$27{,}59\,€ = 2\cdot 1\,\text{ct} + 1\cdot 2\,\text{ct} + 3\cdot 5\,\text{ct} + 4\cdot 10\,\text{ct} + 5\cdot 20\,\text{ct} + 6\cdot 50\,\text{ct} + 7\cdot 1\,€ + 8\cdot 2\,€$$

Teil c) Die kleinsten Veränderungen der Geldbeträge erhält man durch Vertauschen der Anzahlen von Münzen, die in der Reihenfolge nebeneinander stehen. Ein Vertauschen der Anzahlen bei den 1-ct- und 2-ct-Münzen führt zu einer Veränderung des Geldbetrages um ein Cent. Die nächstgrößere Veränderung des Geldbetrages erhält man durch Vertauschen der Anzahlen bei den 2-ct- und 5-ct-Münzen. Diese Veränderung beträgt aber bereits drei Cent. Folglich ist eine Veränderung um zwei Cent nicht möglich.

Klassenstufe 7



Wir bezeichnen die Größen der Winkel $\sphericalangle\, BAD$, $\sphericalangle\, CBA$, $\sphericalangle\, DCB$ und $\sphericalangle\, ADC$ in dieser Reihenfolge wie üblich mit α, β, γ und δ.

Nach Voraussetzung (1) gilt $|AB| = |AD|$. Nach Voraussetzung (2) gilt $|AC| = |BD|$. Nach Voraussetzung (3) gilt $|AB| = |AC|$. Aus diesen drei Gleichungen folgt

$$|AD| = |AB| = |BD| = |AC|\,, \tag{4}$$

siehe Abbildung. Wegen (4) ist das Dreieck ABD gleichseitig. Daher gilt

$$\alpha = |\sphericalangle BAD| = 60^\circ\,. \tag{5}$$

Wegen (1) ist die Gerade AC Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle\, BAD$, weswegen $|\sphericalangle BAC| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle BAD|$ gilt. Hieraus und aus (5) folgt

$$|\sphericalangle BAC| = 30^\circ\,. \tag{6}$$

Nun betrachten wir das Dreieck ABC. Dieses ist wegen (4) gleichschenklig mit der Basis $\overline{BC}$. Aus (6) und nach dem Basiswinkelsatz und dem Innenwinkelsatz folgt

$$\beta = |\sphericalangle CBA| = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - |\sphericalangle BAC|) = \frac{1}{2} \cdot 150^\circ = 75^\circ\,. \tag{7}$$

Wegen (1) und (7) folgt

$$\delta = |\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle CBA| = 75^\circ\,. \tag{8}$$

Wegen (5), (7) und (8) und nach dem Innenwinkelsatz für Vierecke folgt

$$\gamma = |\sphericalangle DCB| = 360^\circ - |\sphericalangle BAD| - |\sphericalangle CBA| - |\sphericalangle ADC| = 150^\circ\,.$$

Die Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ haben also die Größen 60°, 75°, 75° und 150°.

Klassenstufe 8

Teil a) Da die Punkte A, B, C und D auf einem Kreis k liegen, liegen insbesondere A, B und C auf diesem Kreis k. Da es genau einen Kreis gibt, auf dem A, B und C liegen, nämlich den Umkreis des Dreiecks ABC, muss k dieser Umkreis sein.

Wir wählen daher ohne Einschränkung die Eckpunkte A, B und C aus, konstruieren den Umkreismittelpunkt M des Dreiecks ABC als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ und zeichnen den Umkreis k zum Dreieck ABC, siehe Abbildung 1.

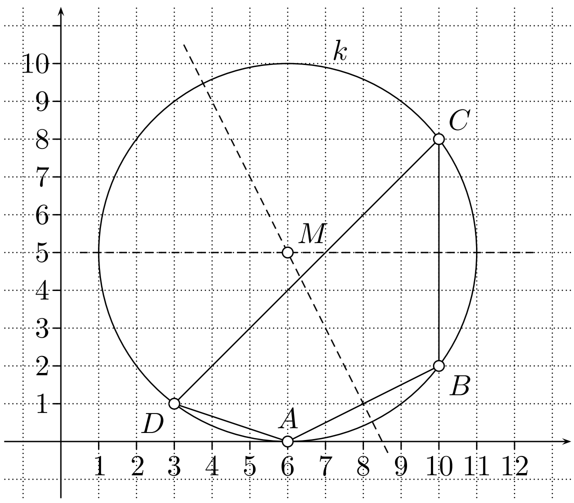


Abbildung 1

Der Mittelpunkt des Kreises k hat die Koordinaten (6,5).

Teil b) Vermutung: In jedem Sehnenviereck beträgt die Summe der Größen von gegenüberliegenden Innenwinkeln 180°.

Teil c) Voraussetzung: Die Punkte A, B, C und D sind paarweise verschiedene Punkte, welche in dieser Reihenfolge auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M liegen, wobei M im Inneren des Vierecks $ABCD$ liegt.

Zudem seien die Bezeichnungen wie in Abbildung 2 gewählt. Weiterhin setzen wir $\alpha = |\sphericalangle BAD|$, $\beta = |\sphericalangle CBA|$, $\gamma = |\sphericalangle DCB|$ und $\delta = |\sphericalangle ADC|$.

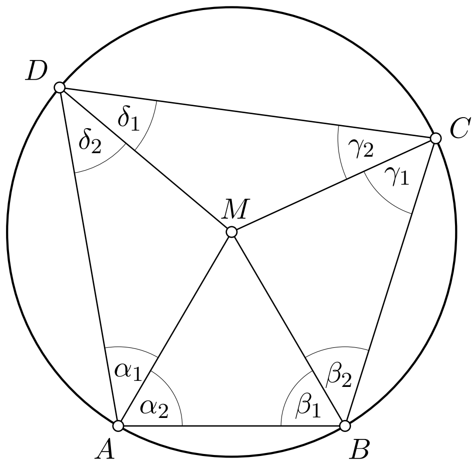


Abbildung 2

Behauptung: Es gelten

$$\alpha + \gamma = 180°, \quad \beta + \delta = 180°.$$

Beweis: Nach Voraussetzung gilt

$$|MA| = |MB| = |MC| = |MD| = r. \tag{1}$$

Zudem gelten

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2, \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2, \quad \delta = \delta_1 + \delta_2. \tag{2}$$

Wir führen den Rest des Beweises in tabellarischer Form und halten hinter jeder Schlussfolgerung fest, welche Beweismittel benutzt wurden.

	Feststellung	Begründung
(3)	$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$	Innenwinkelsumme im Viereck
(4)	$\alpha_2 = \beta_1$; $\beta_2 = \gamma_1$; $\gamma_2 = \delta_1$; $\delta_2 = \alpha_1$	(1) und Basiswinkelsatz
(5)	$\beta = \alpha_2 + \gamma_1$; $\delta = \alpha_1 + \gamma_2$	Folgt aus (4) und (2)
(6)	$\alpha + (\alpha_2 + \gamma_1) + \gamma + (\alpha_1 + \gamma_2) = 360°$	(5) in (3) eingesetzt
(7)	$2\alpha + 2\gamma = 360°$	Folgt aus (6) und (2)
(8)	$\alpha + \gamma = 180°$	Folgt aus (7) und Division durch 2
(9)	$\beta + \delta = 180°$	(8) in (3) eingesetzt und umgeformt

Damit ist der geforderte Beweis erbracht.

Klassenstufe 9

Teil a) Ein Dreieck sei gemäß der Aufgabenstellung in n Vierecke zerlegt. Die Summe der Innenwinkelgrößen dieser n Vierecke beträgt $n \cdot 360°$. Die Innenwinkel verteilen sich auf die drei Ecken des Dreiecks mit einer Winkelsumme von 180°, auf die r zusätzlichen Eckpunkte auf dem Rand des Dreiecks mit einer Winkelsumme von je 180° und auf die i inneren Eckpunkte mit einer Winkelsumme von je 360°. Die Gesamtsumme der Innenwinkelgrößen der n Vierecke beträgt also $180° + r \cdot 180° + i \cdot 360°$. Zusammen ergibt sich

$$n \cdot 360° = i \cdot 360° + (r+1) \cdot 180°$$

und damit $n = i + \frac{r+1}{2}$, was zu zeigen war.

Teil b) Angenommen, ein Dreieck ist in n konkave Vierecke mit i zusätzlichen Eckpunkten im Inneren des Dreiecks zerlegt. Ein Eckpunkt eines Vierecks mit einem Vierecks-Innenwinkel von mehr als 180° kann nur einer der inneren Punkte sein. Von den Winkeln um einen inneren Punkt kann andererseits höchstens einer größer als 180° sein. Folglich gilt $i \geq n$. Zusammen mit der Feststellung $n > i$ aus Teil a) erhält man einen Widerspruch. Eine solche Zerlegung eines Dreiecks kann also nicht existieren.

Klassenstufe 10

Mit t bezeichnen wir die Zeit (in Stunden), die beide für die Strecke von Adorf nach Cedorf benötigen würden, wenn Mario die ganze Zeit am Steuer säße.

Da auf der Hinfahrt Luigi in seiner Zeithälfte doppelt so weit kommt wie Mario in seiner, legt Mario auf der Hinfahrt ein Drittel der Strecke zurück und Luigi zwei Drittel. Dafür braucht jeder $\frac{1}{3}\,t$. Die Hinfahrt dauert also $\frac{2}{3}\,t$.

Auf der Rückfahrt braucht Mario für seine Weghälfte $\frac{1}{2}\,t$, Luigi für seine $\frac{1}{4}\,t$. Die Rückfahrt dauert also $\frac{3}{4}\,t$.

Da sie eine Stunde länger dauert als die Hinfahrt, folgt $\frac{2}{3}\,t + 1\,\mathrm{h} = \frac{3}{4}\,t$, also $t = 12\,\mathrm{h}$. Die Hinfahrt dauert $\frac{2}{3}\,t$, also $8\,\mathrm{h}$.

Lösungsvariante: Eine Argumentation mit Fahrzeiten und Geschwindigkeiten kann wie folgt geführt werden: Da beide Fahrer jeweils mit konstanter Geschwindigkeit fahren, sind die zurückgelegten Wege jeweils proportional zur dafür benötigten Zeit. Wir bezeichnen mit v_m die Geschwindigkeit, mit der Mario fährt. Somit fährt Luigi mit der Geschwindigkeit $2\,v_m$.

Die für die Hinfahrt benötigte Zeit bezeichnen wir mit t_h. Für die Rückfahrt benötigen die beiden dann $t_r = t_h + 1\,\mathrm{h}$.

Auf der Hinfahrt legen sie mit Mario am Steuer die Strecke $\frac{1}{2}\,t_h \cdot v_m$ und mit Luigi am Steuer die Strecke $\frac{1}{2}\,t_h \cdot 2\,v_m$ zurück, insgesamt also die Strecke $s = \frac{3}{2}\,t_h \cdot v_m$.

Die Zeit $t_r = t_1 + t_2$ für den Rückweg setzt sich zusammen aus der Zeit t_1 mit Mario am Steuer und der Zeit t_2 mit Luigi am Steuer. Da jeder eine Strecke der Länge $\frac{1}{2}\,s$ fährt, gilt

$$\frac{1}{2}\,s = t_1\,v_m = t_2 \cdot 2\,v_m\,,$$

woraus sich mit $s = \frac{3}{2}\,t_h \cdot v_m$ insgesamt

$$\frac{3}{4}\,t_h = t_1 = 2\,t_2, \text{ also } t_1 = \frac{3}{4}\,t_h \text{ und } t_2 = \frac{3}{8}\,t_h$$

ergibt und damit

$$t_r = t_1 + t_2 = \frac{9}{8}\,t_h = t_h + 1\,\mathrm{h}\,.$$

Daraus folgt $t_h = 8\,\mathrm{h}$. Die Hinfahrt dauert also genau 8 Stunden.

Klassenstufen 11–13

Angenommen, x ist eine reelle Zahl, die die Gleichung erfüllt.

Schreibt man die Ausdrücke unter den Wurzeln als vollständige Quadrate, lautet die gegebene Gleichung

$$\sqrt{(x+1)^2} + 2\sqrt{(x+3)^2} = \sqrt{(x+2)^2} + 3\,.$$

Wegen der für alle reellen Zahlen x gültigen Identität $\sqrt{x^2} = |x|$ ist dies äquivalent zu

$$|x+1| + 2\,|x+3| - |x+2| = 3\,. \tag{1}$$

Die Betragsstriche lassen sich durch eine vollständige Fallunterscheidung beseitigen:

Fall 1: Es sei $x < -3$. Dann ist $x+1 < x+2 < x+3 < 0$, und die Gleichung (1) lautet nach Auflösen der Betragsstriche und einer einfachen Umformung

$$\begin{aligned} -(x+1) - 2(x+3) + (x+2) &= 3\,, \\ -2x - 5 &= 3\,. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $x = -4$ als Lösung. Tatsächlich gilt $-4 < -3$.

Fall 2: Es sei $-3 \le x < -2$. Dann ist $x+1 < x+2 < 0 \le x+3$ und (1) geht über in

$$\begin{aligned} -(x+1) + 2(x+3) + (x+2) &= 3\,, \\ 2x + 7 &= 3\,. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist genau für $x = -2$ erfüllt. Der Wert -2 liegt aber nicht im betrachteten Intervall, sodass in diesem Fall keine Lösung vorhanden ist.

Fall 3: Es sei $-2 \le x < -1$. Dann ist $x+1 < 0 \le x+2 < x+3$, und äquivalente Umformung von (1) ergibt

$$\begin{aligned} -(x+1) + 2(x+3) - (x+2) &= 3\,, \\ 3 &= 3\,. \end{aligned}$$

Da das eine wahre Aussage ist, sind alle Zahlen x des betrachteten Intervalls Lösungen.

Fall 4: Es sei $-1 \leq x$. Dann ist $0 \leq x+1 < x+2 < x+3$, und (1) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} (x+1) + 2(x+3) - (x+2) &= 3\,, \\ 2x + 5 &= 3\,. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist genau für $x = -1$ erfüllt. Dieser Wert liegt im betrachteten Intervall und ist deshalb eine weitere Lösung.

Zusammengefasst ergibt sich: Die gegebene Gleichung besitzt genau die Lösungen $x = -4$ und alle x mit $-2 \leq x \leq -1$.