BUNDESWEITE
MATHEMATIK-WETTBEWERBE
Bildung & Begabung

MO-Tage

Die neuen MO-Tage sind MO-ntag und MO-nnerstag.

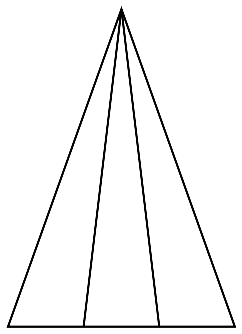
Liebe Schülerinnen und Schüler,

die aktuelle Corona-Krise beschäftigt auch uns Mathe-Fans. Damit ihr während dieser schweren Zeit nicht auf mathematische Herausforderungen verzichten müsst, haben wir, der Verein Mathematik-Olympiaden e.V. und das Talentförderzentrum Bildung & Begabung, die MO-Tage ins Leben gerufen.
Ab sofort veröffentlichen wir zweimal pro Woche ein Aufgabenblatt mit kniffligen Aufgaben aus den Mathematik-Olympiaden der vergangenen Jahre – jeden MO-ntag und MO-nnerstag. Pro Klassenstufe gibt es eine Aufgabe, sodass jede und jeder die eigene Schwierigkeitsstufe für sich selbst wählen kann. Zusätzlich zu dem Aufgabenblatt veröffentlichen wir außerdem ein Lösungsblatt zum letzten Aufgabenblatt.
Viel Spaß!

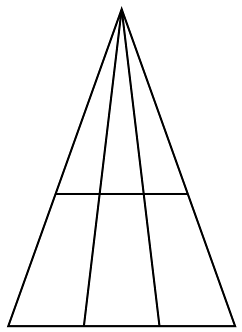
Serie 4 – Aufgaben

Die Lösungen werden am 09.04.2020 veröffentlicht.

Klassenstufe 3



Diese Figur besitzt ein Stockwerk.
In ihr findet man 6 Dreiecke.



Diese Figur besitzt zwei Stockwerke.
In ihr findet man 12 Dreiecke.

a) Zeichne eine solche Figur mit drei Stockwerken. Wie viele Dreiecke sind in ihr enthalten?

b) Wie viele Dreiecke sind in einer solchen Figur mit 10 Stockwerken zu finden? Begründe.

Klassenstufe 4

Vier Läuferinnen Antonia, Bella, Caroline und Damla kommen zum 60 m-Lauf.

a) Zur Begrüßung gibt jede jeder einmal die Hand. Wie oft werden Hände geschüttelt?

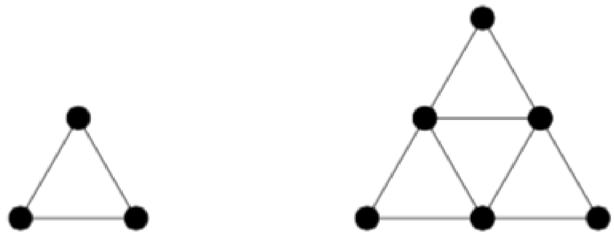
b) Die Mädchen stellen sich auf den Laufbahnen 1 bis 4 auf. Caroline startet auf Bahn 1. Gib alle Möglichkeiten an, wie die anderen Mädchen sich auf den Laufbahnen verteilen können.

Laufbericht:
Antonia zog an Bella vorbei und hielt ihren Vorsprung bis ins Ziel. Auch Caroline gelang es noch, auf den letzten Metern Bella zu überholen. Wenn auch überraschend, so war Caroline doch langsamer als Damla, die knapp von Antonia geschlagen wurde.

c) Wie war der Zieleinlauf?

Klassenstufe 5

Alexandra hat vor sich viele Hölzchen von jeweils 5 cm Länge und viele Knetekugeln, die die Hölzchen an ihrem Ende zusammenhalten können. Sie möchte daraus Dreiecksgitter bauen. In den Abbildungen siehst du jeweils ein Dreiecksgitter mit der Seitenlänge 5 cm bzw. 10 cm.



a) Zunächst baut sie ein Dreiecksgitter mit 20 cm Seitenlänge. Berechne, wie viele Knetekugeln und wie viele Hölzchen sie dazu verwendet.

b) Einige Knetekugeln verbinden 2 Hölzchen, einige 4 Hölzchen und einige 6 Hölzchen. Ermittle für alle drei Fälle die Anzahl der Knetekugeln, wenn das Dreiecksgitter wieder 20 cm Seitenlänge hat.

c) Ermittle die entsprechenden Anzahlen für die Hölzchen und die verschiedenen Knetekugeln bei einem Dreiecksgitter mit 60 cm Seitenlänge.

Klassenstufe 6

LENA und ANNE sitzen zusammen und denken über ihre Vornamen nach.

a) LENA sagt: „Mein Vorname hat vier Buchstaben, ein A, ein E, ein L und ein N.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese vier Buchstaben jeweils verschieden anzuordnen?“

b) ANNE überlegt entsprechend: „Mein Vorname hat auch vier Buchstaben. Dann gibt es genauso viele Möglichkeiten wie bei LENA.“
Hat ANNE Recht?

c) Nun kommt auch noch NANNI und sagt: „Mein Vorname hat sogar fünf Buchstaben. Bei mir gibt es deswegen mehr Möglichkeiten der Anordnung als bei euch mit euren vier Buchstaben.“
Hat NANNI Recht?

d) Darauf sagt LENA: „Dann hole ich meine große Schwester ANNETTE, und die hat mehr Möglichkeiten als wir alle zusammen.“
Hat LENA Recht?

Klassenstufe 7

a) Jemand bildet aus zwei positiven ganzen Zahlen die Summe, die Differenz und das Produkt.

Untersuche, ob es vorkommen kann, dass keines dieser drei Ergebnisse durch 3 teilbar ist.

b) Jemand bildet aus drei positiven ganzen Zahlen, für die $a \geq b \geq c$ gilt, die Summe $a + b + c$ und die Differenzen $a - b$, $b - c$, $a - c$.

Untersuche, ob es vorkommen kann, dass keines dieser vier Ergebnisse durch 3 teilbar ist.

Klassenstufe 8

Mit Zirkel und Lineal sind Dreiecke ABC zu konstruieren, welche folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die Seite $\overline{AB}$ hat die Länge c.

(2) Der Winkel CBA hat die Größe β.

(3) Der Punkt W ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden zum Winkel BAC mit der Seite $\overline{BC}$.

(4) Die Strecke $\overline{AW}$ hat die Länge w.

a) Beschreibe deine Konstruktion.
Fertige eine Konstruktionszeichnung für $c = 6\,\text{cm}$, $w = 5{,}4\,\text{cm}$ und $\beta = 60°$ an.

b) Beweise: Wenn ein Dreieck wie beschrieben konstruiert wird, dann erfüllt es die gegebenen Bedingungen.

c) Untersuche, ob es neben dem von dir für $c = 6\,\text{cm}$, $w = 5{,}4\,\text{cm}$ und $\beta = 60°$ konstruierten Dreieck weitere, zu diesem nicht kongruente Dreiecke gibt, welche die genannten Bedingungen erfüllen.

Hinweis: Bei einer *Konstruktion mit Zirkel und Lineal* sind Zirkel und Lineal ideale Instrumente. Mit dem idealen Zirkel kann der Abstand zweier beliebiger Punkte abgegriffen werden und mit einem solchen Abstand als Radius können Kreise um Punkte als Mittelpunkt konstruiert werden. Das ideale Lineal hat keine Skalierung. Dafür kann man mit ihm die Gerade durch zwei verschiedene Punkte konstruieren. Weitere Punkte können als Schnittpunkte von Geraden mit Geraden, Kreisen mit Kreisen und Geraden mit Kreisen konstruiert werden. Da das ideale Lineal keine Skalierungen hat, können mit ihm weder Längen gemessen noch abgetragen werden.

Die hier durch Angabe von Maßen vorgegebenen Streckenlängen und Winkelgrößen dürfen durch Abmessen mit (skaliertem) Lineal bzw. Winkelmesser einmalig in die Konstruktion übernommen werden.

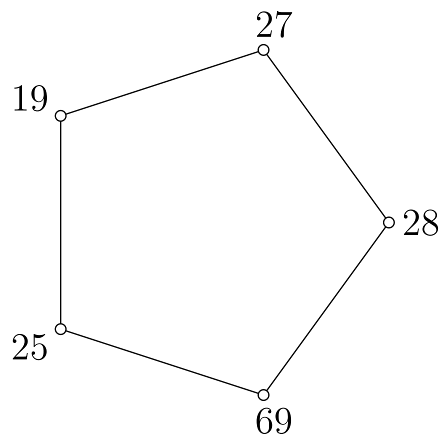
Klassenstufe 9

Im Folgenden werden Trapeze $ABCD$ betrachtet. Dabei soll stets AB parallel zu CD sein, die Winkel BAD und ADC sollen rechte Winkel sein und für die Länge von $\overline{BC}$ soll gelten, dass sie gleich der Summe der Längen von $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ ist.

a) Bestimmen Sie die Länge von $\overline{AD}$, wenn $|AB| = 9\,\text{cm}$ und $|CD| = 4\,\text{cm}$ gilt.

b) Beweisen Sie allgemein, dass der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ gleich $|MC| \cdot |MB|$ ist, wobei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$ ist.

Klassenstufe 10



Die Ecken eines Fünfecks sollen so mit positiven ganzen Zahlen beschriftet werden, dass folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

(1) Zwei Zahlen, die an benachbarten Ecken stehen, sind teilerfremd.

(2) Zwei Zahlen, die nicht an benachbarten Ecken stehen, sind nicht teilerfremd.

Eine Beschriftung der Ecken des Fünfecks entsprechend den gegebenen Bedingungen nennen wir *zulässig*.

Beispielsweise ist die Beschriftung der Ecken des Fünfecks mit den Zahlen 28, 69, 25, 19 und 27 im Uhrzeigersinn nicht zulässig, denn die Zahlen 28 und 19 liegen nicht an benachbarten Ecken, sind aber teilerfremd. Somit ist Bedingung (2) nicht erfüllt.

a) Weisen Sie nach, dass die Zahl 2 in keiner zulässigen Beschriftung enthalten ist.
b) Finden Sie eine zulässige Beschriftung und weisen Sie nach, dass die angegebene Beschriftung die geforderten Eigenschaften hat.
c) Ermitteln Sie unter allen zulässigen Beschriftungen den kleinstmöglichen Wert der größten der fünf Zahlen.

Klassenstufen 11–13

Die Zahlenfolge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ist durch $x_1 = 1$ und die rekursive Vorschrift

$$x_{k+1} = x_k + y_k \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots$$

gegeben, wobei y_k die letzte Ziffer der Dezimaldarstellung von x_k bezeichnet. Man beweise, dass die Zahlenfolge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ alle Potenzen von 4 enthält, dass also für jede positive ganze Zahl n ein Index k mit $x_k = 4^n$ existiert.