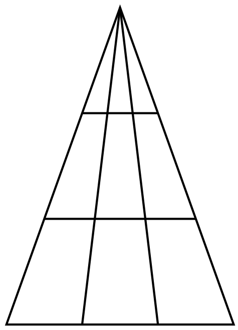
MO-Tage

Serie 4 – Lösungen

Klassenstufe 3

Teil a) In der Figur mit drei Stockwerken lassen sich 18 Dreiecke finden.



Teil b) In einer 10-stöckigen Figur lassen sich 60 Dreiecke finden. Mit jedem hinzukommenden Stockwerk werden es 6 Dreiecke mehr.

Klassenstufe 4

a) Es werden sechsmal die Hände geschüttelt (AB, AC, AD, BC, BD, CD).

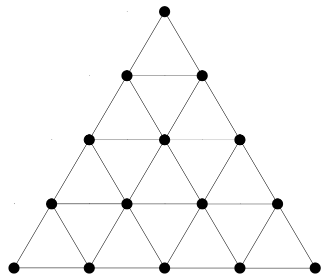
b) Es gibt insgesamt sechs Möglichkeiten.

Laufbahn						
2	A	A	B	B	D	D
3	B	D	A	D	A	B
4	D	B	D	A	B	A

c) Die Läuferinnen kommen in folgender Reihenfolge ins Ziel: Antonia – Damla – Caroline – Bella.

Klassenstufe 5

Teil a) 20 cm Seitenlänge bedeuten vier Hölzchen und fünf Knetekugeln pro Seite.
Zählt man von einer Seite aus die Knetekugeln bis zur gegenüberliegenden Ecke, so erhält man $(5+4+3+2+1=)\,15$.
Die Hölzchen kann man von jeder Seite des Dreiecks aus auf die gleiche Weise zählen. Man erhält von einer Seite aus $(4+3+2+1=)\,10$ Hölzchen und damit insgesamt $(3\cdot 10=)\,30$ Hölzchen.



Teil b) Es gibt 3 Knetekugeln, die mit 2 Hölzchen verbunden sind (Ecken), 9 Knetekugeln, die mit 4 Hölzchen verbunden sind (auf den 3 Seiten), und 3 Knetekugeln, die mit 6 Hölzchen verbunden sind.

Teil c) 60 cm Seitenlänge bedeuten 12 Hölzchen und 13 Knetekugeln pro Seite.

Anzahl der Knetekugeln: $(13+12+\cdots+3+2+1=)\,91$

Anzahl der Hölzchen: $3\cdot(12+11+\cdots+3+2+1=)\,234$

Anzahl der Knetekugeln, die mit 2 Hölzchen verbunden sind: 3

Anzahl der Knetekugeln, die mit 4 Hölzchen verbunden sind: $(3\cdot 11=)\,33$

Anzahl der Knetekugeln, die mit 6 Hölzchen verbunden sind:
$(10+9+\cdots+3+2+1=)\,55$

Klassenstufe 6

Vorweg: Die Zahl $1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n$ bezeichnen wir mit $n!$ (gelesen n Fakultät). Wenn n Dinge auf n Plätze verteilt werden sollen, so gibt es genau $n!$ Möglichkeiten.

Teil a) Die vier Buchstaben sind unterschiedlich, deswegen gibt es $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=4!=24$ Möglichkeiten, denn: Für den ersten Platz in der Reihenfolge der Buchstaben gibt es 4 Möglichkeiten, für den zweiten Platz gibt es dann noch 3 Möglichkeiten, für den dritten Platz noch 2 Möglichkeiten. Der letzte Platz ist dann festgelegt (eine Möglichkeit).

Teil b) ANNE hat nicht Recht, denn bei ihrem Namen sind die beiden N's nicht unterscheidbar. Wären sie unterscheidbar, z. B. als N und N, wären es tatsächlich wieder 24 Möglichkeiten. Da aber immer ein Paar von Möglichkeiten, also z.B. NAEN und NAEN, nicht zu unterscheiden ist, gibt es nur $(24:2=)\,12$ Möglichkeiten.

Teil c) Bei NANNI ist es noch schlimmer: Wären alle Buchstaben unterscheidbar, so gäbe es ($5! =$) 120 Möglichkeiten. Nun sind aber die drei N's nicht unterscheidbar. Wären sie unterscheidbar, also z. B. **N**, *N* und N, dann gäbe es tatsächlich diese 120 Möglichkeiten. Da aber immer sechs Möglichkeiten zusammenfallen (also z.B. A**N***N*NI, A**N**N*N*I, A*N***N**NI, AN**N***N*I, A*N*N**N**I, AN*N***N**I), gibt es nur ($120 : 6 =$) 20 Möglichkeiten.

NANNI hat also zwar bezüglich ANNA Recht, bezüglich LENA jedoch nicht – insgesamt stimmt ihre Aussage also nicht.

Teil d) Bei ANNETTE machen wir es einmal mit System: „ANNETTE" hat 7 Buchstaben, dabei treten allerdings das E zweimal auf, das N zweimal und das T ebenfalls zweimal.

Die Anzahl der Möglichkeiten ist folglich

$$Anzahl(\text{ANNETTE}) = \frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{5040}{8} = 630.$$

Tatsächlich ist $630 > 24 + 12 + 20 = 56$: LENA hat Recht.

Hinweis: Bei den Aufgabenteilen a), b) und c) ist ein systematisches und vollständiges Aufzählen der Möglichkeiten als vollständig richtig zu werten, ebenso wäre es korrekt, bei d) mehr als 56 Möglichkeiten anzugeben.

Klassenstufe 7

Teil a) Es werden folgende drei Fälle unterschieden:

Fall 1: Beide Zahlen lassen bei Division durch 3 denselben Rest. Dann lässt die Differenz der beiden Zahlen bei Division durch 3 immer den Rest 0, d. h. die Differenz ist durch 3 teilbar.

Fall 2: Eine Zahl lässt bei Division durch 3 den Rest 0, die andere Zahl lässt den Rest 1 oder 2. Dann lässt das Produkt dieser beiden Zahlen bei Division durch 3 den Rest 0, d. h. das Produkt ist durch 3 teilbar.

Fall 3: Eine Zahl lässt bei Division durch 3 den Rest 1, die andere lässt den Rest 2. Dann lässt die Summe der beiden Zahlen bei Division durch 3 den Rest 0, d. h. die Summe ist durch 3 teilbar.

In jedem der möglichen Fälle befindet sich unter Differenz, Summe und Produkt der beiden positiven ganzen Zahlen jeweils ein Ergebnis, welches durch 3 teilbar ist.

Da die Fallunterscheidung vollständig ist, kann es folglich nicht vorkommen, dass keines der drei Ergebnisse durch 3 teilbar ist.

Teil b) Es gibt folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Wenigstens zwei Zahlen lassen bei Division durch 3 denselben Rest. Dann lässt die Differenz zweier solcher Zahlen bei Division durch 3 den Rest 0, d. h. diese Differenz ist durch 3 teilbar. Da (bis auf das Vorzeichen) jede Differenz vertreten ist, ist in diesem Fall mindestens eine der Differenzen $a - b$, $b - c$ oder $a - c$ durch 3 teilbar.

Fall 2: Es treten alle Reste auf. Dann lässt die Summe der drei Zahlen bei Division durch 3 den Rest 0, d. h. die Summe ist durch 3 teilbar.

In jedem der möglichen Fälle befindet sich unter den Differenzen oder der Summe jeweils ein Ergebnis, welches durch 3 teilbar ist.

Da die Fallunterscheidung vollständig ist, kann es folglich nicht vorkommen, dass keines dieser vier Ergebnisse durch 3 teilbar ist.

Klassenstufe 8

Teil a) Konstruktionsbeschreibung:

(K1) Konstruiere eine Strecke $\overline{AB}$ mit der Länge c.

(K2) Konstruiere einen Punkt X durch Antragen eines Winkels der Größe β im Punkt B an den Strahl $\overrightarrow{AB}$ derart, dass $|\sphericalangle XBA| = \beta$ gilt.

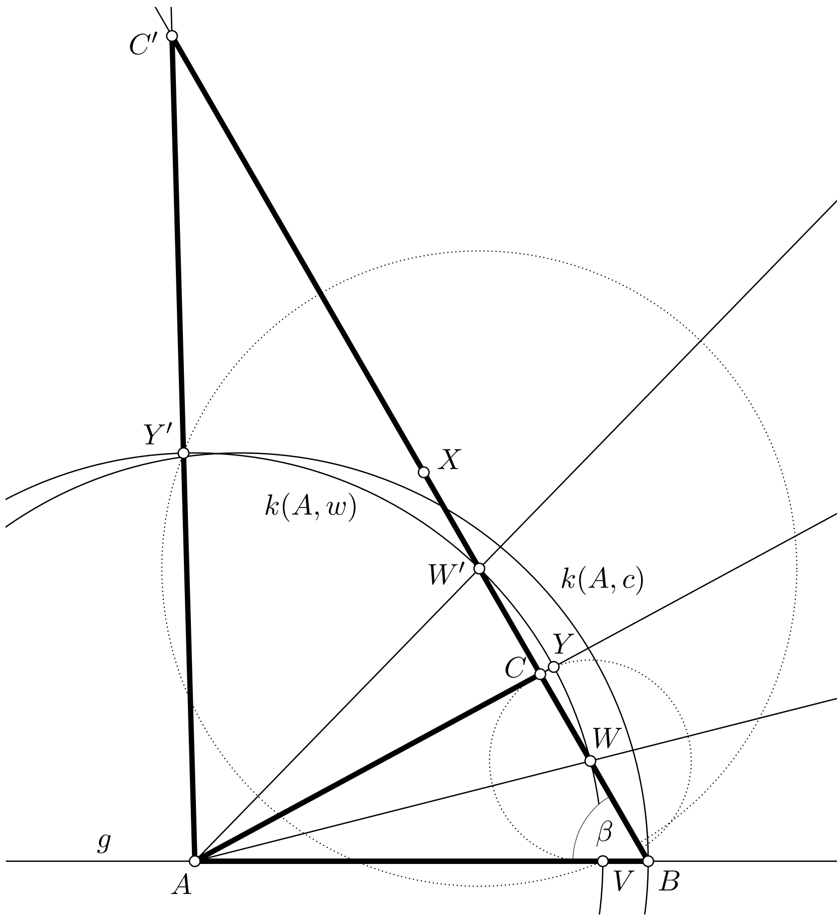
(K3) Konstruiere die Schnittpunkte des Kreises $k(A, w)$ mit dem Strahl $\overrightarrow{BX}$. Wähle einen der Schnittpunkte als Punkt W aus.

(K4) Konstruiere den Schnittpunkt V des Kreises $k(A, w)$ mit dem Strahl $\overrightarrow{AB}$.

(K5) Konstruiere den von V verschiedenen Schnittpunkt Y des Kreises $k(W, |WV|)$ mit dem Kreis $k(A, w)$.

(K6) Konstruiere den Schnittpunkt C der Strahlen $\overrightarrow{BX}$ und $\overrightarrow{AY}$.

Konstruktionszeichnung: (Es ist nur die Konstruktion eines der beiden möglichen Dreiecke gefordert.)



Teil b) Beweis: Ein Dreieck ABC sei wie oben beschrieben konstruiert worden.

Nach Schritt (K1) gilt $|AB| = c$, weswegen die Bedingung (1) erfüllt ist.

Nach Schritt (K3) gilt $W \in k(A,w) \cap \overrightarrow{BX}$ und daher insbesondere $|AW| = w$. Die Bedingung (4) ist folglich erfüllt.

Nach Schritt (K6) gilt $C \in \overrightarrow{BX} \cap \overrightarrow{AY}$ und $C \neq A$, $C \neq B$. Wegen $C \in \overrightarrow{BX}$, $C \neq B$ und nach Schritt (K2) gilt $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle XBA| = \beta$, weswegen Bedingung (2) erfüllt ist.

Wegen $C \in \overrightarrow{AY}$, $C \neq A$, $V \in \overrightarrow{AB}$ und $V \neq B$ gilt

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle VAY\,. \tag{5}$$

Nach den Schritten (K4) und (K5) gelten $|AV| = |AW| = |AY|$ und $|WV| = |WY|$. Nach Kongruenzsatz (sss) sind die Dreiecke AVW und AWY daher kongruent und es folgt

$$|\sphericalangle VAW| = |\sphericalangle WAY|\,. \tag{6}$$

Da nach Schritt (K5) die Punkte V und Y verschieden voneinander sind, liegen diese Punkte auf verschiedenen Seiten der Geraden AW. Wegen (6) ist daher AW die Winkelhalbierende des Winkels VAY und wegen (5) auch die Winkelhalbierende des Winkels BAC. Nach Schritt (K3) liegt W auf $\overrightarrow{BX}$. Da C auch auf $\overrightarrow{BX}$ liegt und da AW die Winkelhalbierende des Winkels BAC ist, liegt W auf $\overline{BC}$. Daher ist die Bedingung (3) erfüllt.

Damit ist bewiesen: Wenn ein Dreieck ABC durch die Schritte (K1) bis (K6) konstruiert wurde, dann erfüllt es die Bedingungen (1) bis (4).

Teil c) Bei $c = 6\,\text{cm}$, $w = 5{,}4\,\text{cm}$ und $\beta = 60°$ entstehen im Schritt (K3) zwei Schnittpunkte des Kreises $k(A, w)$ mit dem Strahl $\overrightarrow{BX}$. Einer wurde mit W bezeichnet. Der andere Schnittpunkt wird nun mit W' bezeichnet. Weiter sei C' der Punkt, der analog zu den Schritten (K4), (K5) und (K6) mit W' anstelle von W entsteht.

Die Dreiecke ABW und ABW' stimmen zwar in zwei Seitenlängen ($|AB|$ und $|AW| = |AW'|$) und einer Winkelgröße ($|\sphericalangle WBA| = |\sphericalangle W'BA|$) überein, sind aber nicht kongruent, da $|\sphericalangle BAW| \neq |\sphericalangle BAW'|$ gilt. Daher sind auch die Dreiecke ABC und ABC' nicht kongruent zueinander. Durch entsprechende Auswahl von W im Schritt (K3) können durch die beschriebene Konstruktion beide Dreiecke konstruiert werden.

Klassenstufe 9

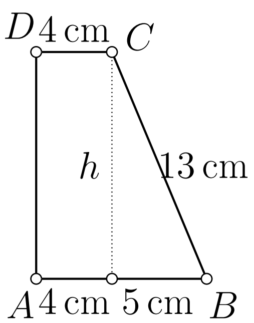


Abbildung 1

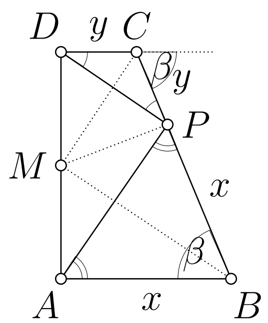


Abbildung 2

Teil a) Eine Parallele zu AD durch C zerlegt das Trapez in ein Rechteck und ein rechtwinkliges Dreieck (siehe Abbildung 1). Die Länge einer Kathete dieses Dreiecks entspricht der Differenz $|AB| - |CD|$ und beträgt somit $9\,\text{cm} - 4\,\text{cm} = 5\,\text{cm}$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$|AD| = h = \sqrt{(13\,\text{cm})^2 - (5\,\text{cm})^2} = 12\,\text{cm}\,.$$

Teil b) Wenn $|AB| + |CD| = |BC|$ gilt, dann muss es auf $\overline{BC}$ einen Zwischenpunkt P geben, für den $|AB| = |BP| = x$ und $|PC| = |CD| = y$ gilt (siehe Abbildung 2). Die so entstehenden Dreiecke ABP und PCD sind jeweils gleichschenklig. Wenn wir die Größe des Winkels CBA mit β bezeichnen, dann haben die beiden Basiswinkel im Dreieck ABP jeweils die Größe $90° - \frac{1}{2}\beta$. Nach dem Wechselwinkelsatz hat ein Außenwinkel des Dreiecks PCD ebenfalls die Größe β, deshalb haben die Basiswinkel im Dreieck PCD jeweils die Größe $\frac{1}{2}\beta$. Die beiden vom Punkt P ausgehenden Basiswinkel APB und CPD haben somit eine Winkelsumme von 90°, und wegen des gestreckten Winkels CPB gilt dann $|\sphericalangle DPA| = 180° - 90° = 90°$. Nach der Umkehrung des Thalessatzes liegt P also auf dem Thaleskreis über $\overline{AD}$ und die Strecke $\overline{MP}$ ist so lang wie die Strecken $\overline{MD}$ bzw. $\overline{MA}$. Damit stimmen die Dreiecke MPC und MCD in allen drei Seitenlängen überein und sind somit kongruent. Gleiches gilt für die Dreiecke MAB und MBP. Das Trapez besteht also aus zwei Paaren kongruenter Dreiecke und das Dreieck MBC aus je einem Dreieck der beiden Paare. Damit ist der Inhalt des Trapezes doppelt so groß wie der Inhalt des Dreiecks MBC und der Winkel BMC nimmt genau die Hälfte des gestreckten Winkels AMD ein. Somit ist das Dreieck MBC rechtwinklig, sein Flächeninhalt beträgt $\mathrm{A}_{MBC} = \frac{1}{2} \cdot |MB| \cdot |MC|$, womit der Inhalt des Trapezes den doppelten Wert $\mathrm{A}_{ABCD} = |MB| \cdot |MC|$ annimmt.

Klassenstufe 10

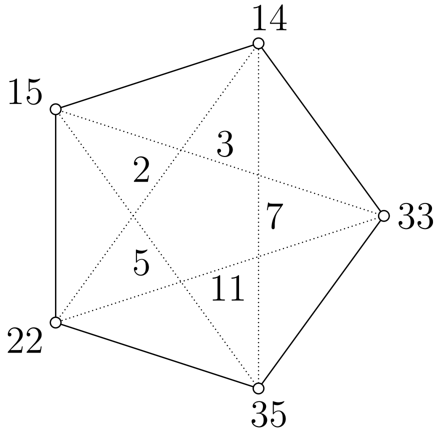
Teil a) Wir führen den Nachweis indirekt. Angenommen, die Zahl 2 ist in einer zulässigen Beschriftung enthalten. Dann gibt es zwei Ecken des Fünfecks, die nicht an einer gleichen Seite anliegen wie die Ecke, die mit 2 beschriftet wurde. Diese zwei Ecken müssen mit Zahlen beschriftet sein, die nicht teilerfremd zu 2 und somit gerade sind. Diese beiden Zahlen sind nicht teilerfremd, sind aber benachbart. Somit ergibt sich ein Widerspruch zu Bedingung (1). Also kann die Zahl 2 nicht in einer zulässigen Beschriftung enthalten sein.

Teil b) Im Folgenden wird das Beispiel einer Beschriftung konstruiert, das unter allen zulässigen Beschriftungen den kleinstmöglichen Wert der größten der fünf Zahlen liefert.

Das Fünfeck hat fünf Diagonalen. Jeder dieser Diagonalen ordnen wir eine andere Primzahl zu (diese sind paarweise teilerfremd). In jeder Ecke des Fünfecks enden zwei Diagonalen. Wir beschriften nun jede Ecke mit dem Produkt der zwei Primzahlen, die den Diagonalen zugeordnet sind, die im jeweiligen Eckpunkt enden.

In benachbarten Ecken enden keine gleichen Diagonalen, somit sind die Zahlen in benachbarten Ecken teilerfremd und (1) ist erfüllt. Da nicht benachbarte Ecken über eine Diagonale verbunden sind, sind die Zahlen an diesen Ecken beide durch die Primzahl teilbar, die dieser Diagonalen zugeordnet ist, und damit nicht teilerfremd und (2) ist erfüllt.

Ordnen wir den fünf Diagonalen des Fünfecks im Uhrzeigersinn die Primzahlen 3, 7, 11, 5 und 2 zu, so ergibt sich damit eine zulässige Beschriftung der Ecken des Fünfecks mit den Zahlen 33, 35, 22, 15 und 14 (im Uhrzeigersinn).



Teil c) Betrachten wir eine zulässige Beschriftung mit den geforderten Eigenschaften. Wir ordnen zunächst jeder Diagonalen den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen an ihren Enden zu. Nach Aufgabenstellung sind all diese größten gemeinsamen Teiler größer als 1.

Da zwei unterschiedliche Diagonalen stets mindestens ein Paar benachbarter Ecken haben, sind alle den Diagonalen zugeordneten Zahlen paarweise teilerfremd. An jeder Ecke des Fünfecks steht somit eine Zahl, die mindestens so groß ist wie das Produkt der Zahlen, die den beiden in ihr endenden Diagonalen zugeordnet sind.

Ersetzt man die Zahlen an den Diagonalen jeweils durch ihre kleinsten Primteiler und die Zahlen an den Ecken durch die Produkte der beiden Zahlen an den in ihnen endenden Diagonalen, so vergrößert sich keine der Zahlen an den Ecken und die Beschriftung bleibt nach Teil b) zulässig.

Ersetzt man die Primzahlen an den Diagonalen so durch die ersten fünf Primzahlen, dass die Ordnung „der Größe nach“ erhalten bleibt, und passt die Eckenbeschriftung erneut an, so vergrößert sich wieder keine der Zahlen an den Ecken und die Beschriftung bleibt nach Teil b) wieder zulässig.

Enden bei der so gewonnenen Beschriftung die Diagonalen mit Fünf und Sieben nicht in einer gemeinsamen Ecke, so endet entweder die Diagonale mit der Fünf oder die Diagonale mit der Sieben in einer gleichen Ecke mit der Diagonalen mit der Elf. In dieser Ecke enthielt die Ausgangsbeschriftung also eine Zahl größer oder gleich 55.

Enden die Diagonalen mit Fünf und Sieben hingegen in einer gemeinsamen Ecke, so enthielt die Ausgangsbeschriftung in dieser Ecke eine Zahl größer oder gleich 35.

In Teil b) ist eine zulässige Beschriftung mit der größten auftretenden Zahl 35 angegeben.

Somit ist 35 die kleinste Möglichkeit für die größte Zahl einer zulässigen Beschriftung.

Klassenstufen 11–13

Die ersten Glieder der Folge lauten $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = 8$, $x_5 = 16$, $x_6 = 22, \ldots$ Weil die letzte Ziffer y_{k+1} von x_{k+1} eindeutig durch y_k bestimmt ist, wird die Folge y_k für $k \geq 2$ periodisch mit der Periode 4. Für $k \geq 1$ gilt also

$$y_{4k-2} = 2\,, \quad y_{4k-1} = 4\,, \quad y_{4k} = 8\,, \quad y_{4k+1} = 6\,.$$

Für $k \geq 2$ ist demzufolge

$$x_{k+4} = x_k + y_k + y_{k+1} + y_{k+2} + y_{k+3} = x_k + 2 + 4 + 8 + 6 = x_k + 20\,.$$

Aus $x_3 = 4$ folgt somit $x_{4k+3} = 4 + 20k$, und aus $x_5 = 16$ schließt man auf $x_{4k+5} = 16 + 20k$. Wir zeigen nun, dass jede Potenz 4^n von einer der Formen $4 + 20k$ oder $16 + 20k$ mit einer nichtnegativen ganzen Zahl k ist.

Für $n = 1$ ist dies sicher richtig. Für $n \geq 2$ lässt 4^{n-1} bei Division durch 5 entweder den Rest 1 oder den Rest 4. Folglich gibt es eine ganze Zahl $k \geq 0$, für die $4^{n-1} = 5k + 1$ oder $4^{n-1} = 5k + 4$ gilt. Im ersten Fall ist $4^n = 20k + 4$, im zweiten Fall gilt $4^n = 20k + 16$, was zu beweisen war.