BUNDESWEITE MATHEMATIK-WETTBEWERBE
Bildung & Begabung

MO-Tage

Die neuen MO-Tage sind MO-ntag und MO-nnerstag.

Liebe Schülerinnen und Schüler,

die aktuelle Corona-Krise beschäftigt auch uns Mathe-Fans. Damit ihr während dieser schweren Zeit nicht auf mathematische Herausforderungen verzichten müsst, haben wir, der Verein Mathematik-Olympiaden e.V. und das Talentförderzentrum Bildung & Begabung, die MO-Tage ins Leben gerufen.
Ab sofort veröffentlichen wir zweimal pro Woche ein Aufgabenblatt mit kniffligen Aufgaben aus den Mathematik-Olympiaden der vergangenen Jahre – jeden MO-ntag und MO-nnerstag. Pro Klassenstufe gibt es eine Aufgabe, sodass jede und jeder die eigene Schwierigkeitsstufe für sich selbst wählen kann. Zusätzlich zu dem Aufgabenblatt veröffentlichen wir außerdem ein Lösungsblatt zum letzten Aufgabenblatt.
Viel Spaß!

Serie 5 – Aufgaben

Die Lösungen werden am 13.04.2020 veröffentlicht.

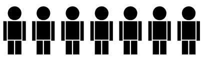
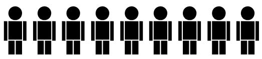
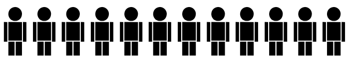
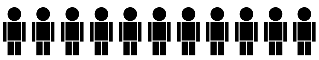
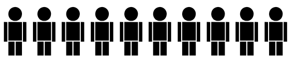
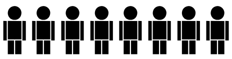
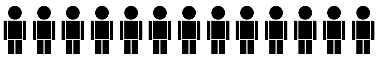
Klassenstufe 3

In einem Schrank liegen 10 weiße und 10 schwarze einzelne Socken. Bestimme die kleinste Zahl von Socken, die du in einer dunklen Nacht herausholen musst, um mit Sicherheit ein gleichfarbiges Paar zu bekommen.

Begründe.

Klassenstufe 4

Teilnehmer der 4. Klassen an einem Schülerwettbewerb,  entspricht 25 Teilnehmern:

	2004	2014
Hamburg		
Erfurt		
Köln		
Berlin		

a) In welcher Stadt nahmen im Jahr 2014 die meisten Kinder teil? Bestimme die Anzahl der Kinder.

b) In welcher Stadt nahmen im Jahr 2004 die wenigsten Kinder teil? Bestimme die Anzahl der Kinder.

c) In welcher Stadt hat sich die Teilnehmerzahl von 2004 zu 2014 verdoppelt?

d) Wie viele Schüler nahmen insgesamt 2004 in allen vier Städten am Wettbewerb teil?

e) Wie viele Schüler nahmen insgesamt 2014 in allen vier Städten am Wettbewerb teil?

f) In welcher Stadt sind von 2004 bis 2014 die meisten Teilnehmer dazugekommen? Wie viele Teilnehmer waren es mehr?

g) In welcher Stadt gab es einen Rückgang der Teilnehmerzahlen? Wie viele Teilnehmer waren es weniger?

Klassenstufe 5

Von einer Baustelle soll Schutt abgefahren werden. Der Lkw einer Firma fährt jeweils zweimal am Tag.

a) Am ersten Tag transportierte er insgesamt 9500 kg. Bei der ersten Fahrt waren es 500 kg weniger als bei der zweiten Fahrt. Wie schwer war die Ladung bei jeder Fahrt?

b) Am zweiten Tag transportierte er insgesamt 9600 kg. Die Ladung der ersten Fahrt war diesmal doppelt so schwer wie bei der zweiten Fahrt. Wie viel Kilogramm Schutt hatte der Lkw jeweils geladen?

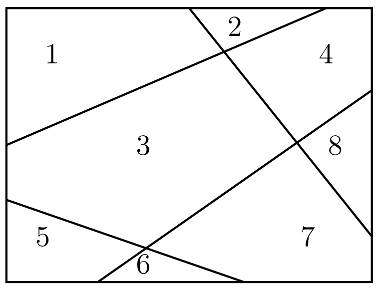
c) Insgesamt sind 100 t Schutt abzufahren. Am wievielten Arbeitstag ist der ganze Schutt abtransportiert, wenn täglich etwa 9600 kg Schutt abtransportiert werden?

Klassenstufe 6

Ein Rechteck ist 6 cm lang und 4 cm breit. Mit einem Lineal werden vier verschiedene gerade Linien gezogen, die jeweils von einer der vier Kanten zu einer anderen Kante verlaufen müssen. Längs dieser Linien wird das Rechteck zerschnitten.

In der Zeichnung ist ein Beispiel dargestellt.

Hier würden 8 Papierschnipsel entstehen.



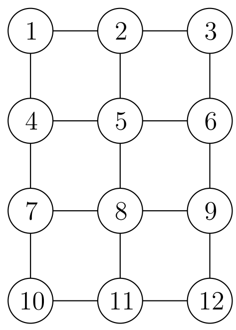
Wie viele Papierschnipsel können dabei entstehen, wenn die Linien anders verlaufen?

Gib alle verschiedenen Möglichkeiten der Anzahlen an, indem du jeweils ein Beispiel aufzeichnest und die Schnipsel nummerierst!

Hinweis: Zwei Möglichkeiten sollen nur dann verschieden sein, wenn sie sich in der Anzahl der Schnipsel unterscheiden. Die Form der Schnipsel spielt keine Rolle.

Klassenstufe 7

Auf dem abgebildeten Spielplan spielen zwei Spieler mit zwei Steinen „Hase und Wolf“. Wolf und Hase ziehen abwechselnd, wobei der Wolf beginnt. Ein Zug besteht im Übergang auf ein benachbartes Feld. Zwei verschiedene Felder sind benachbart, wenn sie durch eine gerade Linie verbunden sind.



Der Wolf gewinnt, wenn er nach spätestens 6 Zügen auf ein Feld gelangt, das der Hase gerade besetzt. Andernfalls gewinnt der Hase.

Es werden zwei Ausgangsstellungen a) und b) betrachtet:

a) Der Wolf steht auf dem Feld 1 und der Hase steht auf dem Feld 12.

b) Der Wolf steht auf dem Feld 1 und der Hase steht auf dem Feld 3.

Untersuche, in welchen der beiden Ausgangsstellungen der Wolf stets gewinnen kann, egal wie der Hase zieht.

Klassenstufe 8

Von den 36 Teilnehmern eines Absolvententreffens wohnt jeder in genau einem der Bundesländer Hessen, Bayern, Niedersachsen, Hamburg, Sachsen. Außerdem ist bekannt:

(1) Mehr als die Hälfte aller Absolventen wohnt in Bayern.

(2) Es sind mehr Teilnehmer aus Sachsen als aus Hamburg.

(3) Die Teilnehmer aus Hessen und Niedersachsen zusammen sind ein Neuntel aller Teilnehmer.

(4) In Hamburg wohnen doppelt so viele von diesen Absolventen wie in Hessen.

(5) Die Anzahl der Absolventen aus Hessen ist größer als das Doppelte, aber kleiner als das Vierfache der Anzahl der Absolventen aus Niedersachsen.

Ermittle, wie viele Teilnehmer an diesem Treffen jeweils in Hessen, Bayern, Niedersachsen, Hamburg bzw. Sachsen wohnen.

Klassenstufe 9

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(-1, 0)$ und $B(3, 0)$ sowie der Graph g der linearen Funktion $y = f(x) = \frac{4}{5}x$. Der Punkt Q liege so auf g, dass ABQ gleichschenklig ist.

a) Bestimmen Sie für eine mögliche Lage von Q die Koordinaten!

b) Wie viele verschiedene Punkte gibt es, an denen Q liegen kann?
Weisen Sie die Korrektheit der von Ihnen gefundenen Anzahl nach!

c) Wie kann man mit Zirkel und Lineal die in Teil b) gezählten Punkte konstruieren?
(Grundkonstruktionen wie Mittelsenkrechte, Parallele oder Winkelhalbierende dürfen direkt benutzt und müssen nicht beschrieben werden.)

Hinweis: Eine praktisch durchgeführte Konstruktion gemäß Teil c) genügt nicht als Nachweis der Richtigkeit der in Teil b) gefragten Anzahl. In Teil b) wird – wie in der Mathematik üblich – ein logischer Beweis verlangt.

Klassenstufe 10

a) Weisen Sie nach, dass es eine natürliche Zahl $a > 1$ gibt, für die der Term

$$82 \cdot \left(a^8 - a^4\right)$$

durch das Produkt von drei aufeinanderfolgenden und mindestens zweistelligen natürlichen Zahlen teilbar ist.

b) Bestimmen Sie die kleinste mindestens zweistellige Primzahl a, für die

$$82 \cdot \left(a^8 - a^4\right)$$

durch das Produkt von drei aufeinanderfolgenden und mindestens zweistelligen natürlichen Zahlen teilbar ist.

c) Der obige Term wird jetzt durch $82 \cdot \left(a^8 - a^2\right)$ ersetzt.
Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl $a > 1$, für die dieser Term durch das Produkt von drei aufeinanderfolgenden und mindestens zweistelligen natürlichen Zahlen teilbar ist.

Klassenstufen 11–13

Man bestimme alle reellen Zahlen x, y, die das Gleichungssystem

$$\sqrt{x - 2016} + \sqrt{y - 56} = 11\,, \tag{1}$$

$$x + y = 2193 \tag{2}$$

erfüllen.