MO-Tage

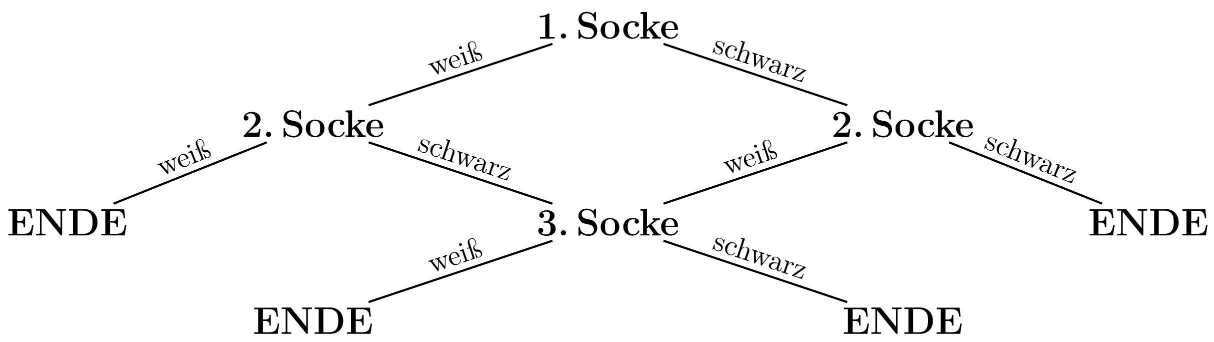
Serie 5 – Lösungen

Klassenstufe 3

Wenn nur 2 Socken herausgeholt werden, könnte eine schwarz und eine weiß sein. Man hätte also kein gleichfarbiges Paar. Es reichen aber 3 Socken.

Nehmen wir an, die erste Socke ist weiß, dann kann die zweite Socke auch weiß sein und man hat zwei gleichfarbige Socken. Oder die zweite Socke ist schwarz, dann wird noch die dritte Socke betrachtet. Ist sie weiß, hat man zwei weiße gleichfarbige Socken, ist sie schwarz, hat man zwei schwarze gleichfarbige Socken. Der Fall, dass die erste Socke schwarz ist, ist analog.

Die gesuchte kleinste Zahl beträgt also 3.



Klassenstufe 4

Teil a) Berlin – 325 Teilnehmer

Teil b) Erfurt – 150 Teilnehmer

Teil c) Die Teilnehmerzahl hat sich in Erfurt verdoppelt.

Teil d) Insgesamt: 2004 – 800 Teilnehmer

Teil e) Insgesamt: 2014 – 1100 Teilnehmer

Teil f) In Erfurt war der Anstieg am größten. Es waren 150 Teilnehmer mehr.

Teil g) In Köln gab es einen Rückgang von 25 Teilnehmern.

Klassenstufe 5

Teil a) Da der Lkw bei der zweiten Fahrt 500 kg mehr transportierte als bei der ersten, betrug die Last der ersten Fahrt $((9500\,\text{kg} - 500\,\text{kg}) : 2 =)\,4500\,\text{kg}$. Daraus folgt für die Last der zweiten Fahrt eine Masse von $(4500\,\text{kg} + 500\,\text{kg} =)\,5000\,\text{kg}$.

Teil b) Die gesamte Masse des Schutts verteilt sich zu zwei Teilen auf die erste und zu einem Teil auf die zweite Fahrt, das sind insgesamt drei Teile. Daraus folgt, dass der Lkw bei der zweiten Fahrt $(9600\,\text{kg} : 3 =)\,3200\,\text{kg}$ abtransportiert hat und bei der ersten Fahrt $(3200\,\text{kg} \cdot 2 =)\,6400\,\text{kg}$.

Teil c) Da $100\,\text{t} = 100\,000\,\text{kg}$ gilt und $100\,000 : 9600 = 10\,\text{Rest}\,4000$ gilt, wird am 11. Arbeitstag der gesamte Schutt abtransportiert sein.

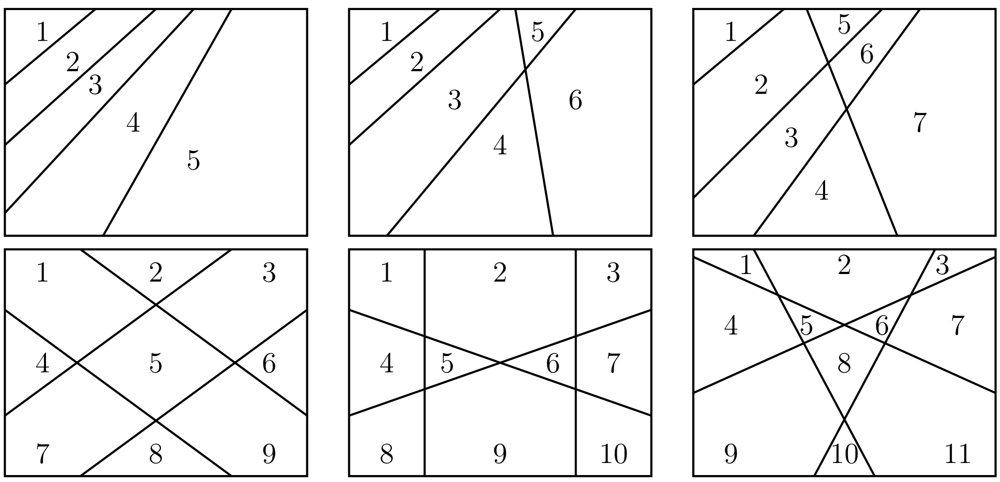
Klassenstufe 6

Es können zwischen 5 und 11 Papierschnipsel entstehen:

Wenn wir die Linien nacheinander zeichnen, wird bei jeder neuen Linie wenigstens ein Gebiet in zwei Teile zerlegt. Am Anfang haben wir ein Gebiet, also am Ende wenigstens $(1 + 1 + 1 + 1 + 1 =)$ 5 Schnipsel.

Wenn wir die Linien nacheinander zeichnen, kann jede neue Linie höchstens alle bisherigen Linien schneiden. Wenn $0, 1, 2$ oder 3 solche Schnittpunkte entstehen, werden $1, 2, 3$ bzw. 4 Gebiete in jeweils zwei Teile zerlegt. Am Anfang haben wir ein Gebiet, also am Ende höchstens $(1 + 1 + 2 + 3 + 4 =)$ 11 Schnipsel.

Neben dem gegebenen Beispiel mit 8 Papierschnipseln sind dies Beispiele für die anderen Anzahlen:



Klassenstufe 7

Ausgangstellung a) Der Wolf muss zuerst auf Feld 2 oder 4 ziehen. Der Hase hat nun genau zwei Möglichkeiten für seinen ersten Zug:

Fall 1: Der Hase zieht auf Feld 9. Dann kann der Wolf auf Feld 5 ziehen. Der Hase kann nun nur auf eines der Felder 6, 8 und 12 ziehen. Wenn der Hase auf das Feld 6 oder 8 zieht, gewinnt der Wolf in seinem nächsten, d. h. dritten Zug auf Feld 6 bzw. 8. Wenn der Hase auf das Feld 12 zurück zieht, dann kann der Wolf mit seinem dritten Zug auf Feld 8 ziehen. Der Hase kann im dritten Zug nur auf Feld 9 oder Feld 11 ziehen und wird im nächsten, d. h. im vierten Zug des Wolfes auf Feld 9 bzw. 11 gefangen, weswegen der Wolf gewinnt. Folglich kann der Wolf in diesem Fall stets gewinnen.

Fall 2: Der Hase zieht auf Feld 11. Dann kann der Wolf auf Feld 5 ziehen. Der Hase kann nun nur auf eines der Felder 8, 10 und 12 ziehen. Wenn der Hase auf das Feld 8 zieht, gewinnt der Wolf in seinem nächsten, d. h. dritten Zug auf Feld 8. Wenn der Hase auf das Feld 10 oder 12 zieht, dann zieht der Wolf mit seinem dritten Zug auf Feld 8. Der Hase kann im dritten Zug nur auf eines der Felder 7, 9 und 11 ziehen und wird im nächsten, d. h. im vierten Zug vom Wolf gefangen, wenn der Wolf auf das jeweilige Feld zieht. Auch hier gewinnt der Wolf. Folglich kann der Wolf auch in diesem Fall stets gewinnen.

Der Wolf kann in dieser Ausgangsstellung stets gewinnen, egal wie der Hase zieht.

Ausgangstellung b) Auf dem angegebenen Spielplan wechselt bei jedem Zug die zu ziehende Figur von einem ungeraden Feld auf ein gerades und umgekehrt. Folglich stehen der Wolf und der Hase, wenn der Wolf am Zuge ist, immer beide auf einem ungeraden oder beide auf einem geraden Feld. Da weder zwei gerade noch zwei ungerade Felder benachbart sind, kann der Wolf nie und erst recht nicht nach spätestens 6 Zügen auf ein vom Hasen besetztes Feld gelangen.

Folglich kann der Wolf hier niemals gewinnen.

Klassenstufe 8

Aus (3) folgt, dass die Summe aus der Anzahl der Absolventen aus Hessen und der Anzahl der Absolventen aus Niedersachsen $(36 : 9 =)$ 4 beträgt. Von allen möglichen Zerlegungen der Zahl 4 in zwei natürliche Zahlen als Summanden erfüllt nur jene die Bedingung (5), nach der die Anzahl der Absolventen aus Hessen 3 und die Anzahl der Absolventen aus Niedersachsen 1 beträgt. Daraus und aus (4) folgt, dass genau 6 Absolventen in Hamburg wohnen. Aus (1) folgt, dass mindestens 19 Absolventen in Bayern wohnen, und aus (2) folgt, dass mindestens 7 Absolventen in Sachsen wohnen. Da für die Teilnehmer aus diesen beiden Bundesländern nur noch genau $(36 - 6 - 3 - 1 =)$ 26 Teilnehmer in Betracht kommen, sind 19 und 7 die einzig möglichen infrage kommenden Anzahlen.

Von den 36 Absolventen wohnen folglich genau 3 in Hessen, 19 in Bayern, 1 in Niedersachsen, 6 in Hamburg und 7 in Sachsen.

Klassenstufe 9

Der Graph g von f ist eine Gerade durch den Ursprung $O(0,0)$.

Teil a) Das Dreieck ABQ hat gleichlange Schenkel $\overline{AQ}$ und $\overline{BQ}$, wenn Q auf der Mittelsenkrechten m zur Basis $\overline{AB}$ liegt. Da $\overline{AB}$ auf der x-Achse liegt, ist m parallel zur y-Achse und besteht aus allen Punkten mit x-Koordinate $\frac{-1+3}{2} = 1$. Dies ist also auch die x-Koordinate von Q.

Da Q zusätzlich auf g liegt, gibt f an, wie man aus der x-Koordinate von Q die y-Koordinate von Q ermittelt. Also hat Q die Koordinaten $(1, f(1)) = \left(1, \frac{4}{5}\right)$.

Hinweis: Wie im Teil b) gezeigt wird, gibt es neben dem eben beschriebenen Punkt $Q = Q_1$ vier weitere Punkte $Q_2, \ldots, Q_5$, für die das Dreieck ABQ_i gleichschenklig ist mit $|AQ_i| = |AB|$ (zwei Punkte) oder $|BQ_i| = |AB|$ (ebenfalls zwei Punkte), siehe Abbildung 1. Wenn ein Schüler die Koordinaten eines solchen Punkts bestimmt statt für den wesentlich leichter zu berechnenden Punkt Q_1, so muss er einen Nachweis der Korrektheit seines Ergebnisses führen.

Ein solcher Nachweis ist hier der Vollständigkeit halber geführt.

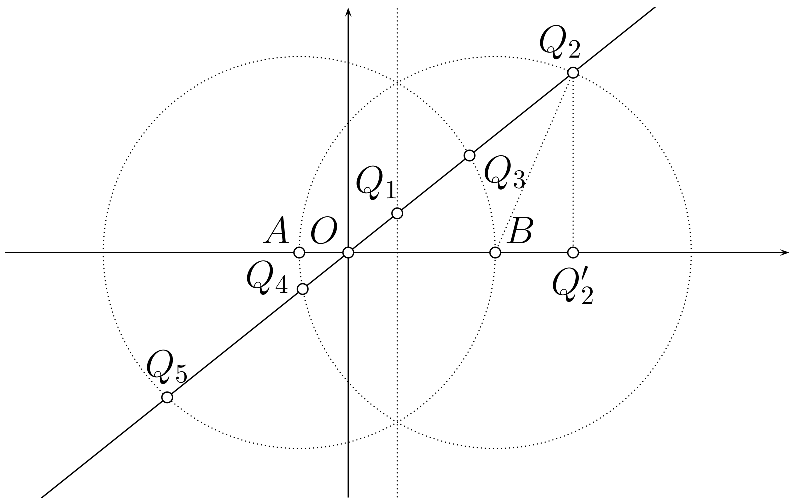


Abbildung 1

Wie unten genauer ausgeführt ist, ergeben sich Punkte $Q_2, \ldots, Q_5$ als Schnittpunkte der Geraden $y = \frac{4}{5}x$ mit Kreisen um A bzw. B, die jeweils den Radius $r = |AB| = 4$ besitzen.

Zeichnet man zu Q_2 das Lot auf die x-Achse mit dem Fußpunkt Q'_2, so erhält man ein rechtwinkliges Dreieck BQ'_2Q_2 (siehe Abbildung 1). Da der Punkt Q_2 als Punkt von g Koordinaten der Form $\left(x, \frac{4}{5}x\right)$ besitzt, gilt für seine Koordinaten in diesem Dreieck nach dem Satz des Pythagoras

$$4^2 = (x-3)^2 + \left(\frac{4}{5}x\right)^2 .$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen x_1 und x_2, aus denen sich jeweils $y_i = f(x_i), i = 1, 2$, berechnen lassen. Für Q_2 ergeben sich die Koordinaten

$$x = \frac{75 + 80\sqrt{2}}{41} \quad \text{und} \quad y = \frac{4}{5}\left(\frac{75 + 80\sqrt{2}}{41}\right) = \frac{60 + 64\sqrt{2}}{41} .$$

Die zweite Lösung führt zu den Koordinaten von Q_4.

Nach dieser Methode lassen sich über die Gleichung $4^2 = (x+1)^2 + \left(\frac{4}{5}x\right)^2$ auch die Koordinaten von Q_3 und Q_5 ermitteln. Zur Referenz sind hier die vollständigen Koordinaten von Q_2 bis Q_5 angegeben.

$$Q_2 : \left(\frac{75 + 80\sqrt{2}}{41}, \frac{60 + 64\sqrt{2}}{41}\right) \approx (4{,}589; 3{,}671) ,$$

$$Q_3 : \left(\frac{-25 + 40\sqrt{10}}{41}, \frac{-20 + 32\sqrt{10}}{41}\right) \approx (2{,}475; 1{,}980) ,$$

$$Q_4 : \left(\frac{75 - 80\sqrt{2}}{41}, \frac{60 - 64\sqrt{2}}{41}\right) \approx (-0{,}930; -0{,}744)$$

$$\text{und} \quad Q_5: \left(\frac{-25-40\sqrt{10}}{41}, \frac{-20-32\sqrt{10}}{41}\right) \approx (-3{,}695; -2{,}956)\ .$$

Teile b) und c) Ist das Dreieck ABQ gleichschenklig, so hat es eine Basis und zwei Schenkel. Jede der drei Seiten des Dreiecks ABQ kann Basis sein, weswegen wir drei Fälle unterscheiden müssen.

Fall 1: Die Basis ist die Seite $\overline{AB}$. Nach der Lösung von Teil a) wissen wir, dass es dann genau einen solchen Punkt Q gibt, der sich als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m mit g ergibt.

Fall 2: Die Basis ist die Seite $\overline{AQ}$. Wir suchen also alle Punkte Q auf g mit $|AB| = |BQ|$. Diese ergeben sich als Schnittpunkte von g mit dem Kreis k um B durch A, da k genau die Menge aller Punkte mit Abstand $|AB|$ zu B ist. Da der Radius $\overline{AB}$ von k den Punkt $(0, 0)$ auf g im Inneren enthält, wird g von k in zwei Punkten geschnitten. Also gibt es in diesem Fall zwei Schnittpunkte Q. Diese können wie schon beschrieben konstruiert werden.

Fall 3: Analog (Vertauschung der Bezeichnungen A und B) ergeben sich für den Fall, dass $\overline{BQ}$ die Basis ist, genau die zwei Schnittpunkte des Kreises um A durch B mit g als Möglichkeiten für Q.

Betrachten wir die Lage von Q aus Teil a):

Da der Anstieg von g gleich $\frac{4}{5} < 1$ ist, folgt $|\sphericalangle BOQ| < 45°$. Da $|\sphericalangle BAQ|$ nach dem Außenwinkelsatz im Dreieck AOQ noch kleiner sein muss, ist das Dreieck ABQ nicht gleichseitig. Also ist das Dreieck ABQ nicht gleichseitig, wenn $\overline{AB}$ die Basis ist.

Daher gibt es kein gleichseitiges Dreieck ABQ mit Q auf g. Folglich ist in allen Fällen die Basis des gleichschenkligen Dreiecks ABQ eindeutig bestimmt und keine zwei der betrachteten Dreiecke fallen zusammen. Also gibt es auf g genau fünf Punkte Q derart, dass das Dreieck ABQ gleichschenklig ist, und diese können wie in den drei Fällen beschrieben konstruiert werden.

Klassenstufe 10

Teil a) Es gilt

$$82 \cdot \left(a^8 - a^4\right) = 82 \cdot a^4 \cdot \left(a^4 - 1\right) .$$

Da 82 der Nachfolger von $3^4 = 81$ ist, gilt die Behauptung für $a = 3$, denn dann ist der Term $82 \cdot \left(a^8 - a^4\right)$ durch das Produkt der drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen 80, 81 und 82 teilbar.

Teil b) Es gilt

$$82 \cdot \left(a^8 - a^4\right) = 2 \cdot 41 \cdot a^4 \cdot \left(a^4 - 1\right) = 2 \cdot 41 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot \left(a^2 - 1\right) \cdot \left(a^2 + 1\right) .$$

Damit enthält jeder Term das Produkt $\left(a^2 - 1\right) \cdot a^2 \cdot \left(a^2 + 1\right)$ der drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $a^2 - 1$, a^2 und $a^2 + 1$. Für $a = 11$ sind diese 3 Zahlen dreistellig.

Die gesuchte Zahl ist somit die kleinste zweistellige Primzahl, nämlich $a = 11$.

Klassenstufen 11–13

Angenommen, es gibt reelle Zahlen x und y, die das Gleichungssystem erfüllen. Damit die Wurzeln in Gleichung (1) definiert sind, muss dann $x \geq 2016$ und $y \geq 56$ gelten. Das Quadrieren der Gleichung (1) liefert mit binomischer Formel und Gleichung (2) der Reihe nach

$$\begin{aligned} x - 2016 + 2\sqrt{x - 2016}\sqrt{y - 56} + y - 56 &= 121 \,, \\ x + y + 2\sqrt{x - 2016}\sqrt{y - 56} &= 2193 \,, \\ 2\sqrt{x - 2016}\sqrt{y - 56} &= 0 \,. \end{aligned}$$

Diese letzte Gleichung kann nur erfüllt werden für $x = 2016$ oder $y = 56$. Zu $x = 2016$ berechnet man mittels (2) den Wert $y = 177$, zu $y = 56$ erhält man ebenfalls aus (2) den Wert $x = 2137$. Mögliche Lösungspaare sind also nur

$$(2016, 177) \quad \text{und} \quad (2137, 56) \,.$$

Durch Einsetzen sieht man sofort, dass diese beiden Paare wirklich das Gleichungssystem erfüllen.