MO-Tage

Die neuen MO-Tage sind MO-ntag und MO-nnerstag.

Liebe Schülerinnen und Schüler,

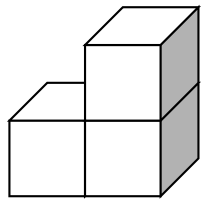
die aktuelle Corona-Krise beschäftigt auch uns Mathe-Fans. Damit ihr während dieser schweren Zeit nicht auf mathematische Herausforderungen verzichten müsst, haben wir, der Verein Mathematik-Olympiaden e.V. und das Talentförderzentrum Bildung & Begabung, die MO-Tage ins Leben gerufen.
Ab sofort veröffentlichen wir zweimal pro Woche ein Aufgabenblatt mit kniffligen Aufgaben aus den Mathematik-Olympiaden der vergangenen Jahre – jeden MO-ntag und MO-nnerstag. Pro Klassenstufe gibt es eine Aufgabe, sodass jede und jeder die eigene Schwierigkeitsstufe für sich selbst wählen kann. Zusätzlich zu dem Aufgabenblatt veröffentlichen wir außerdem ein Lösungsblatt zum letzten Aufgabenblatt.
Viel Spaß!

Serie 6 – Aufgaben

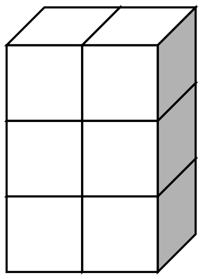
Die Lösungen werden am 16.04.2020 veröffentlicht.

Klassenstufe 3

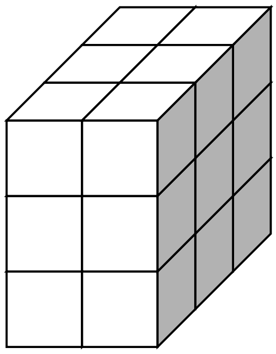
Ein Würfeldrilling sieht so aus:
Er besteht aus drei gleich großen Würfeln, die fest miteinander verbunden sind.



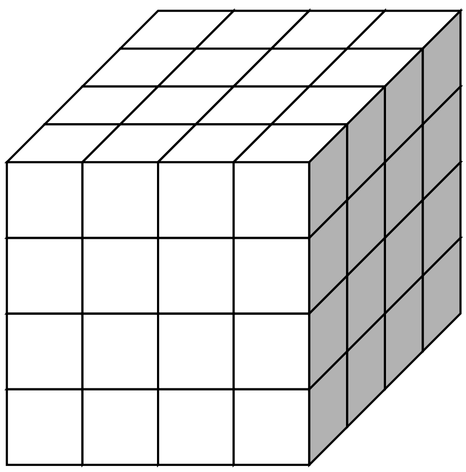
a) Lässt sich dieser Quader aus solchen Würfeldrillingen bauen? Wenn es möglich ist, zeichne deine Lösung ein.



b) Lässt sich dieser Quader aus solchen Würfeldrillingen bauen? Begründe deine Entscheidung.

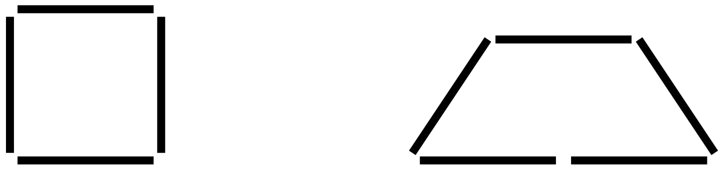


c) Lässt sich dieser Würfel aus solchen Würfeldrillingen lückenlos (ohne Hohlräume) bauen? Begründe deine Entscheidung.



Klassenstufe 4

Mit gleich langen Holzstäbchen werden folgende Vierecke gelegt. Die Vierecke dürfen sich nicht berühren.



a) Wie viele dieser Vierecke kann man mit genau 21 Holzstäbchen legen, ohne dass Stäbchen übrig bleiben?

b) Von jeder Figur wird nun die gleiche Anzahl gelegt. Schreibe alle Möglichkeiten auf, wenn man nicht mehr als 100 Holzstäbchen verwenden darf. Berechne für jede Möglichkeit die Summe der benötigten Holzstäbchen.

c) Mit 1000 Holzstäbchen soll wieder die gleiche Anzahl von jeder Figur gelegt werden. Wie viele Figuren sind das höchstens von jeder Art?

Klassenstufe 5

Ein Olivenbauer sagt: „Auf meinem Gut stehen 200 Olivenbäume. Jeder meiner Olivenbäume trägt im Jahr 36 kg Oliven. Jede Olive wiegt 5 g. Natürlich hat jede Olive einen Stein, und der wiegt 2 g. Um einen Liter Olivenöl zu pressen, brauche ich neunhundert Oliven.“

a) Wie viel wiegen die Oliven, aus denen zwei Liter Olivenöl gepresst wird?

b) Wie viele Liter Olivenöl kann der Bauer pro Jahr aus der Olivenernte herstellen?

c) Wie viel wiegen alle Steine zusammen, die bei der Pressung übrig bleiben?

d) Ein Liter Öl wiegt 1 kg. Der Rest von der Pressung - also das, was weder Stein noch Öl ist - kann als Tierfutter verwendet werden. Wie viel Tierfutter kann der Bauer verkaufen?

Klassenstufe 6

Man kann Ein-Cent-Münzen so legen, dass sie von den Seiten eines Quadrates genau begrenzt werden. Die Abbildung zeigt, wie neun Münzen ein Quadrat bilden.

a) Lukas will aus 28 Ein-Cent-Münzen vier Quadrate so legen, dass drei von ihnen gleich groß sind.
Ermittle alle Möglichkeiten für eine solche Zerlegung.

b) Lukas hat insgesamt 2012 Ein-Cent-Münzen und will sie in sein Sparschwein stecken. Nach 1900 Münzen ist das Sparschwein restlos voll, nichts geht mehr hinein.
Lukas überlegt: Schaffe ich es, aus den restlichen Münzen vier Quadrate so zu legen, dass drei davon gleich groß sind und das vierte kleiner ist?
Zeige durch eine Rechnung, dass Lukas es schaffen kann.

c) Jetzt überlegt Lukas, ob eine solche Anordnung der Münzen auch für die 1900 Centstücke im Sparschwein möglich ist.
Entscheide durch Rechnen, ob dies möglich ist.

Klassenstufe 7

Wir betrachten Zahlen, die folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllen:

(1) Jede solche Zahl ist eine sechsstellige positive ganze Zahl.

(2) In jeder solchen Zahl tritt jede Ziffer höchstens zweimal auf.

(3) In jeder solchen Zahl treten die Ziffern 9, 0, 1, 1 in dieser Reihenfolge und ohne dazwischen stehende andere Ziffern auf.

a) Ermittle die größte und die kleinste dieser Zahlen.

b) Ermittle die Anzahl aller dieser Zahlen.

Klassenstufe 8

Aus Kugeln und Verbindungsstäben werden Würfel gebaut. Bei genau 3 Kugeln auf jeder Kante ergibt sich eine Gesamtanzahl von 20 Kugeln, siehe Abbildung 1.

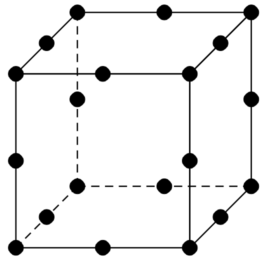


Abbildung 1

Bestimme jeweils die Gesamtanzahl der Kugeln für die folgenden Fälle:

a) Es sind genau 2 Kugeln auf jeder Kante des Würfels.
b) Es sind genau 4 Kugeln auf jeder Kante des Würfels.
c) Es sind genau 100 Kugeln auf jeder Kante des Würfels.
d) Es sind genau n Kugeln auf jeder Kante des Würfels.

Klassenstufe 9

Es seien n Lampen im Kreis angeordnet und zu Beginn befinden sich alle Lampen im Zustand AUS. Ein Elektriker geht von Lampe zu Lampe und schaltet um. Dabei werden Lampen, die sich vor dem Umschalten im Zustand AUS befinden, eingeschaltet und Lampen, die sich vor dem Umschalten im Zustand EIN befinden, ausgeschaltet. Sobald der Elektriker seine erste Runde vollendet hat, beginnt er eine neue Runde, schaltet dabei aber nur jede zweite Lampe um. Nach Vollendung der zweiten Runde beginnt die dritte, in der er nur noch jede dritte Lampe umschaltet usw. In jeder Runde überspringt er also eine Lampe mehr. Sollte er einmal am Ende der Runde nicht genau auf die Lampe n treffen, weil er diese überspringt, so macht er den letzten Schritt in die neue Runde noch mit alter Schrittweite und erhöht seine Schrittweite erst, nachdem er die erste Lampe seiner neuen Runde geschaltet hat.

Für $n = 7$ werden beispielsweise nacheinander folgende Schalter betätigt:

$$1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 2 - 4 - 6 - 1 - 4 - 7 - 4 - 1 - 6 - \ldots$$

Nach dem zehnten Schaltvorgang wird dabei der Schalter 7 erstmals übersprungen.

a) Es sei $n = 120$. Begründen Sie, dass der Schalter 120 in den ersten 5 Runden jedes Mal betätigt wurde.
b) Ermitteln Sie für $n = 120$ die Anzahl der Schaltvorgänge, die vor dem ersten Überspringen des Schalters 120 durchgeführt werden.
c) Die Anzahl der Lampen sei nun $n = 840$. Ermitteln Sie die Nummer des Schaltvorgangs, der erstmals eine der beiden Lampen 49 und 121 ausschaltet.

Klassenstufe 10

Ein Metallsieb für Komposterde besteht aus einem quadratischen Gitter aus senkrecht und waagerecht gespannten Drähten. Die Gitterlinien bilden dabei quadratische Kästchen wie in der Abbildung 1 dargestellt.

Forscher haben untersucht, wie sich Ameisen verhalten, wenn man sie auf diesem Gitter aussetzt. Dazu haben sie folgendes Experiment mehrfach wiederholt:

> Eine Ameise wird an einem inneren Gitterpunkt, dem Startpunkt S, weit genug vom Rand des Metallsiebs entfernt ausgesetzt. Die Ameise kann nur entlang der Gitterlinien laufen. In jedem Gitterpunkt entscheidet sich die Ameise neu, in welche Richtung sie ihren Weg fortsetzt.
> Die Forscher interessieren sich, welche Art von Wegen die Ameisen dabei mit welcher Wahrscheinlichkeit wählen.

Ein möglicher Weg einer Ameise vom Startpunkt S über 9 weitere Gitterpunkte bis zum Ende im Gitterpunkt 10 ist in der Abbildung 1 dargestellt.

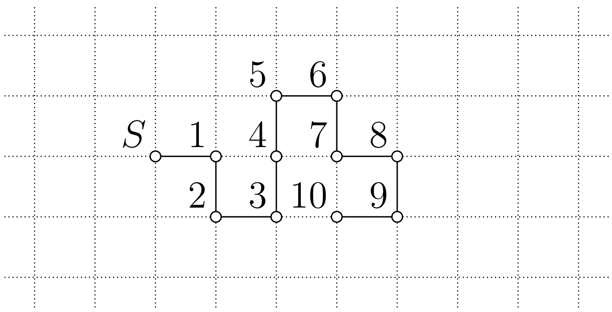


Abbildung 1

Die Forscher haben auf Grund umfangreicher Untersuchungen folgendes Modell für das Verhalten der Ameisen aufgestellt:

- Alle Ameisen verhalten sich gleich.
- Eine Ameise läuft in einer Sekunde eine Kästchenlänge ab.
- An einem Gitterpunkt laufen die Ameisen mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{5}$ weiter geradeaus.
- Biegen Ameisen an einem Gitterpunkt ab, so erfolgt das mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links wie nach rechts.
- Es kommt nicht vor, dass eine Ameise an einem Gitterpunkt umkehrt und auf dem Gitterstück weiterläuft, von dem sie gerade hergekommen ist.

Ermitteln Sie auf der Basis dieses Modells die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

a) Eine Ameise geht dreimal hintereinander geradeaus.
b) Eine Ameise läuft in 8 Sekunden genau die Umfangslinie eines Rechtecks genau einmal ab (und kehrt dabei zum Startpunkt zurück).

Klassenstufen 11–13

Auf einem Kreis k liegen n Punkte $P_1, \ldots, P_n$ so, dass durch keinen Punkt im Inneren des Kreises mehr als zwei der Verbindungsstrecken

$$\overline{P_1P_2}\,, \quad \overline{P_1P_3}\,, \quad \ldots\,, \quad \overline{P_1P_n}\,, \quad \ldots\,, \quad \overline{P_{n-1}P_n}$$

verlaufen.

a) Es sei zunächst $n = 6$. Man ermittle die Anzahl aller Dreiecke, deren Seiten auf den Verbindungsstrecken liegen und deren Ecken Schnittpunkte dieser Verbindungsstrecken im Inneren des Kreises sind.
b) Wie viele solche Dreiecke gibt es für $n = 7$?
c) Wie viele solche Dreiecke gibt es, wenn $n > 7$ eine beliebige positive ganze Zahl ist?