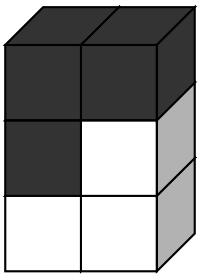
MO-Tage

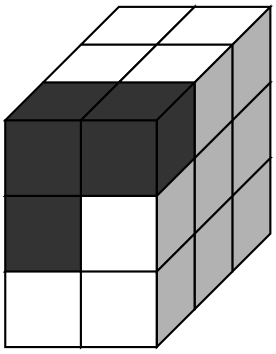
Serie 6 – Lösungen

Klassenstufe 3

Teil a)



Teil b)



Da sich die erste Schicht des Quaders aus zwei Drillingen bauen lässt, kann der gesamte Quader aus sechs Drillingen gebaut werden.

Teil c) Der Würfel lässt sich nicht aus Drillingen bauen. Begründung: Der Würfel besteht aus $4 \times 4 \times 4 = 64$ Würfeln. 64 ist nicht ohne Rest durch drei teilbar.

Klassenstufe 4

Teil a) 4 Quadrate und 1 Trapez

Teil b)

	Anzahl der Holzstäbchen		
gleiche Anzahl	1. Figur	2. Figur	gesamt
1	4	5	9
2	8	10	18
3	12	15	27
4	16	20	36
5	20	25	45
6	24	30	54
7	28	35	63
8	32	40	72
9	36	45	81
10	40	50	90
11	44	55	99

Teil c) Von jeder Figur können 111 Exemplare gelegt werden. Insgesamt werden dafür 999 Holzstäbchen benötigt.

Klassenstufe 5

Teil a) Da aus 900 Oliven ein Liter Öl entsteht und da jede Olive 5 g wiegt, benötigt man $(2 \cdot 900 \cdot 5\text{ g} =)$ $9000\,\text{g} = 9\,\text{kg}$ Oliven für zwei Liter Öl.

Teil b) Alle Bäume zusammen tragen $(200 \cdot 36\text{ kg} =)$ $7200\,\text{kg}$ Oliven.
Da aus 9 kg Oliven zwei Liter Öl entstehen, ergibt diese Menge an Oliven eine Ölmenge von $(7200 : 9 \cdot 2\,\ell =)$ $1600\,\ell$.

Teil c) In einem Kilogramm Oliven befinden sich $(1000 : 5 =)$ 200 Oliven. Da jeder Stein 2 g wiegt, wiegen die Steine in einem Kilogramm Oliven $(200 \cdot 2\text{ g} =)$ $400\,\text{g} = 0{,}4\,\text{kg}$. Da die Gesamternte $7200\,\text{kg}$ beträgt, enthält diese Olivenmenge $(7200 \cdot 0{,}4\,\text{kg} =)$ $2880\,\text{kg}$ an Steinen.

Teil d) Die Gesamternte beträgt nach b) 7200 kg.

Davon sind nach c) 2880 kg Steine.

Das Öl wiegt ($1600 \cdot 1$ kg =) 1600 kg.

Folglich wiegt der Rest, der als Tierfutter verwendet wird,

(7200 kg − 2880 kg − 1600 kg =) 2720 kg.

Klassenstufe 6

Teil a) Es gibt drei verschiedene Lösungen:

(1) $3 \cdot 3^2 + 1^2 = 3 \cdot 9 + 1 = 28$,
(2) $3 \cdot 2^2 + 4^2 = 3 \cdot 4 + 16 = 28$,
(3) $3 \cdot 1^2 + 5^2 = 3 \cdot 1 + 25 = 28$.

Teil b) Zunächst ist festzustellen: Nicht in das Sparschwein gelangt sind ($2012 - 1900 =$) 112 Münzen.

Die drei gleich großen Quadrate können jeweils aus höchstens $6^2 = 36$ Münzen gebildet werden, da $3 \cdot 7^2 = 3 \cdot 49 = 147 > 112$ gilt.

Mit 36 Münzen für die gleich großen Quadrate ist die gesuchte Zerlegung möglich:

$$112 = 36 + 36 + 36 + 4 = 6^2 + 6^2 + 6^2 + 2^2 \,.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Bemerkung: Natürlich kann hier die Zerlegung auch direkt angegeben werden; sie ist leicht zu ersehen.

Teil c) Die Aufgabe bedeutet: Gibt es Zahlen a und b so, dass $1900 = 3a^2 + b^2$ und $a > b$ gilt?

Eine systematische Suche nach einer Lösung sollte damit beginnen, den größtmöglichen Wert von a zu bestimmen:

$$1900/3 = \frac{1900}{3} = 633\frac{1}{3} \,.$$

Da ($25^2 =$) 625 die größte Quadratzahl unterhalb von 633 ist, kann jetzt geprüft werden:

$$1900 - 3 \cdot 25^2 = 25 = 5^2 \,.$$

Folglich gilt $1900 = 3 \cdot 25^2 + 5^2$ mit $25 > 5$.

Damit ist nachgewiesen, dass sich auch die 1900 Centstücke aus dem Sparschwein wie gefordert anordnen lassen.

Klassenstufe 7

Teil a) Es sei z eine Zahl, welche die gestellten Bedingungen erfüllt. Wegen der Bedingungen (1) und (3) gibt es dann Ziffern x und y derart, dass $z = \overline{xy9011}$, $z = \overline{x9011y}$ oder $z = \overline{9011xy}$ gilt.

Man erhält die größte dieser Zahlen, indem in den drei möglichen Formen von z unter Beachtung von Bedingung (2) zuerst x und dann y größtmöglich gewählt wird und von den drei entstehenden Zahlen die größte ausgewählt wird. Auf diese Weise erhält man 989 011, 990 118, 901 198, von denen 990 118 die größte Zahl ist. Folglich ist 990 118 die größte Zahl, welche die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt.

Man erhält die kleinste dieser Zahlen, indem in den drei möglichen Formen von z unter Beachtung von Bedingung (2) zuerst x und dann y kleinstmöglich gewählt wird und von den drei entstehenden Zahlen die kleinste ausgewählt wird. Dabei darf x in den ersten beiden Fällen keine 0 sein, da sonst z nicht sechsstellig ist und daher dann Bedingung (1) nicht erfüllt. Auf diese Weise erhält man 209 011, 290 110, 901 102, von denen 209 011 die kleinste Zahl ist. Folglich ist 209 011 die kleinste Zahl, welche die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt.

Teil b)

Fall 1: Es gelte $z = \overline{xy9011}$. Dann kann für x wegen der Bedingungen (1) und (2) nur $x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ gelten.

Fall 1.1: Es gelte $x = 9$. Wegen Bedingung (2) gilt dann $y \in \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Dieser Fall liefert folglich 8 paarweise verschiedene Möglichkeiten.

Fall 1.2: Es gelte $x \neq 9$. Es verbleiben $x \in X$ und $y \in Y$ mit $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ und $Y = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Da für jedes $x \in X$ und jedes $y \in Y$ eine Zahl entsteht, welche die gestellten Bedingungen erfüllt, liefert dieser Fall $(7 \cdot 9 =)$ 63 paarweise verschiedene Möglichkeiten.

Insgesamt ergeben sich für diesen Fall $(8 + 63 =)$ 71 paarweise verschiedene Möglichkeiten.

Fall 2: Es gelte $z = \overline{x9011y}$. Analog zu Fall 1 erhält man $(8+7\cdot 9 =)$ 71 paarweise verschiedene Möglichkeiten.

Fall 3: Es gelte $z = \overline{9011xy}$. Dann kann für x wegen Bedingung (2) nur $x \in \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ gelten.

Fall 3.1: Es gelte $x = 0$. Dann gilt $y \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Dieser Fall liefert daher 8 paarweise verschiedene Möglichkeiten.

Fall 3.2: Es gelte $x = 9$. Dann gilt $y \in \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Dieser Fall liefert folglich 8 paarweise verschiedene Möglichkeiten.

Fall 3.3: Es gelte $x \neq 0$ und $x \neq 9$. Dann verbleiben $x \in X$ und $y \in Y$ mit $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ und $Y = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Da für jedes $x \in X$ und jedes $y \in Y$ eine Zahl mit den geforderten Eigenschaften entsteht, liefert dieser Fall $(7 \cdot 9 =)$ 63 paarweise verschiedene Möglichkeiten.

Insgesamt ergeben sich für diesen Fall $(8+8+7\cdot 9 = 16+63 =)$ 79 paarweise verschiedene Möglichkeiten.

Addiert man die Anzahlen aus den Fällen 1 bis 3, so erhält man $(71 + 71 + 79 =)$ 221. Daher gibt es 221 paarweise verschiedene Zahlen, welche die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen.

Klassenstufe 8

Teil a) Sind auf jeder Kante des Würfels 2 Kugeln, so können diese nur in den Ecken des Würfels liegen. Da ein Würfel 8 Ecken hat, ist die Gesamtanzahl der Kugeln in diesem Fall 8.

Teil b) Sind auf jeder Kante des Würfels 4 Kugeln, so sind auf jeder Kante des Würfels außer den Kugeln in den Ecken noch 2 weitere Kugeln vorhanden. Da ein Würfel 12 Kanten hat, ist die Gesamtanzahl der Kugeln folglich $(8 + 12 \cdot 2 =)$ 32.

Teil c) Sind auf jeder Kante des Würfels 100 Kugeln, so sind auf jeder Kante des Würfels außer den Kugeln in den Ecken noch 98 weitere Kugeln vorhanden. Die Gesamtanzahl der Kugeln ist folglich $(8 + 12 \cdot 98 =)$ 1184.

Teil d) Sind auf jeder Kante des Würfels n Kugeln, so sind auf jeder Kante des Würfels neben den Kugeln in den Ecken noch $n - 2$ weitere Kugeln vorhanden. Die Gesamtanzahl der Kugeln ist folglich $(8 + 12 \cdot (n - 2) =)$ $12n - 16$.

Klassenstufe 9

Teil a) 120 ist durch 1, 2, 3, 4 und 5 teilbar. Damit endet jede der ersten fünf Runden damit, dass Schalter 120 betätigt wird.

Teil b) 120 ist auch durch 6, aber nicht durch 7 teilbar. Damit wird der Schalter 120 in den ersten 6 Runden immer betätigt und in der siebenten Runde erstmals übersprungen. Das Umschalten des Schalters 120 in der sechsten Runde ist der 294. Schaltvorgang, denn es gilt $120 + 60 + 40 + 30 + 24 + 20 = 294$. Wegen $120 = 17 \cdot 7 + 1$ sind noch 17 weitere Schaltvorgänge mit Schrittweite 7 möglich, bevor der Schalter 120 erstmals ausgelassen wird.

Die gesuchte Zahl ist damit $294 + 17 = 311$.

Teil c) Nach der ersten Runde leuchten alle Lampen, also auch Lampe 49 und Lampe 121. Da 840 durch die Zahlen 1 bis 8 teilbar ist, enden die ersten 8 Runden bei 840 und in jeder Runde k (mit $2 \leq k \leq 8$) werden genau die Vielfachen von k geschaltet.

Der Schalter 49 wird damit erst wieder in der 7. Runde geschaltet, da 49 durch keine der Zahlen 2 bis 6, aber durch 7 teilbar ist. Der Schalter 121 wird dagegen in keiner der Runden 2 bis 7 betätigt, denn 121 ist durch keine der Zahlen 2 bis 7 teilbar.

Der gesuchte Schaltvorgang, bei dem erstmals (nach dem 121. Schaltvorgang) eine der beiden Lampen 49 und 121 ausgeschaltet wird, ist somit der 7. Schaltvorgang in der 7. Runde. In den ersten 6 Runden wird $840+420+280+210+168+140 = 2058$ Mal geschaltet. Das Ergebnis ist damit $2058 + 7 = 2065$.

Klassenstufe 10

Teil a) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus der Produktformel zu $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$.

Teil b) Zunächst bestimmen wir die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Ameisen nach rechts bzw. links abbiegen. Beide Wahrscheinlichkeiten sind gleich groß. Da die Ameisen entweder geradeaus laufen oder abbiegen, beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Abbiegen $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. Damit ergibt sich für das Abbiegen nach rechts und das Abbiegen nach links jeweils die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$.

Der Weg einer Ameise wird durch deren Entscheidungen auf den durchlaufenen Gitterknoten eindeutig bestimmt. Wir protokollieren l, r bzw. g, wenn sich die Ameise dabei nach links bzw. rechts wendet oder aber geradeaus weitergeht, und geben einen Weg im Ereignisraum durch die Folge der Entscheidungen der Ameise an. Alle weiteren zahlenmäßigen Längenangaben beziehen sich auf die Einheit „Kästchenlänge“.

In den folgenden Berechnungen von Wahrscheinlichkeiten werden die Ereignisräume der möglichen Pfade untersucht, die eine Ameise von S aus durchlaufen kann. Dabei wird mehrfach die erste oder die zweite Pfadregel (Additions- bzw. Multiplikationssatz) verwendet.

Es ist für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten unerheblich, ob sich die Ameise von S aus in der ersten Sekunde nach oben, unten, rechts oder links bewegt, denn die jeweiligen Ereignisteilräume kann man durch Drehen des Gitters auf den Ereignisteilraum abbilden, in dem die Ameise zunächst nach rechts geht. In allen vier Ereignisteilräumen ist deshalb die Wahrscheinlichkeit, dass die Ameise nach 8 Sekunden wieder im Ausgangspunkt S angekommen ist und dabei die Umfangslinie eines Rechtecks genau einmal abgelaufen hat, gleich. Wir können unsere Untersuchungen also auf den Ereignisteilraum beschränken, in dem die Ameise von S aus zunächst eine Einheit nach rechts läuft, und nur die Entscheidungen der Ameise in den Sekunden zwei bis acht betrachten.

Die Umfangslinie des zu umlaufenden Rechtecks beträgt 8. Das Rechteck hat demnach die Seitenlängen 1 und 3 oder es handelt sich bei dem zu umlaufenden Rechteck um ein Quadrat mit der Seitenlänge 2.

Wir bestimmen zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass die Ameise ein Quadrat der Seitenlänge 2 umläuft. Dabei kann S entweder ein Eckpunkt des Quadrates (Fall 1) oder der Mittelpunkt einer Quadratseite (Fall 2) sein.

Fall 1: Ist S ein Eckpunkt des Quadrates, so führen nach der ersten Sekunde nur die zwei Wege $glglglg$ oder $grgrgrg$ zu einem Quadrat und zu S zurück. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses Falls ergibt sich damit nach der Formel

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}=2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{2^4}{5^7}.$$

Fall 2: Ist S der Mittelpunkt einer Quadratseite, so führen nach der ersten Sekunde nur die zwei Wege $lglglgl$ oder $rgrgrgr$ zu einem Quadrat und zu S zurück. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses Falls ist somit

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}=2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{2^5}{5^7}.$$

Die Ameise umläuft also mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2^4}{5^7}+\frac{2^5}{5^7}=\frac{48}{5^7}$$

ein Quadrat mit dem Umfang 8 und kehrt zu S zurück.

Umläuft die Ameise ein Rechteck mit den Seitenlängen 1 und 3, so kann S entweder ein Eckpunkt des Rechtecks (Fall 3) oder ein innerer Punkt einer Rechteckseite (Fall 4) sein.

Fall 3: Ist S ein Eckpunkt des Rechtecks, dann führen nach der ersten Sekunde nur die vier Wege $lggllgg$, $rggrrgg$, $gglggl$ oder $ggrrggr$ zu einem Rechteck und zurück zu S. Alle vier Wege enthalten vier Geradeaus-Entscheidungen g und drei Abbiege-Entscheidungen r bzw. l nach rechts bzw. links. Alle diese Wege werden also mit derselben Wahrscheinlichkeit durchlaufen. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des dritten Falles ist demnach

$$4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{32}{5^7}\,.$$

Fall 4: Ist S ein innerer Punkt einer Rechteckseite, so liegt S auf der Rechteckseite mit der Seitenlänge 3. In diesem Fall führen nach der ersten Sekunde nur die Wege $gllggll$, $llggllg$, $grrggrr$ oder $rrggrrg$ zu einem Rechteck und zu S zurück. Diese vier Wege sind gleich wahrscheinlich, denn sie enthalten alle drei Geradeaus-Entscheidungen g und vier Abbiege-Entscheidungen r bzw. l nach rechts bzw. links. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des vierten Falles ist demnach

$$4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{64}{5^7}\,.$$

Die Ameise umläuft somit ein Rechteck mit den Seitenlängen 1 und 3 mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{32}{5^7} + \frac{64}{5^7} = \frac{96}{5^7}\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Ameise nach 8 Sekunden erstmals wieder im Ausgangspunkt S angekommen ist und dabei genau die Umfangslinie eines Rechtecks genau einmal abgelaufen hat, beträgt demnach

$$\frac{48}{5^7} + \frac{96}{5^7} = \frac{144}{5^7} = 0{,}0018432\,.$$

Unter allen Ameisenwegen der Länge 8 durchläuft also eine Ameise in knapp 0,2 % aller Fälle genau ein Rechteck der Länge 8 und kehrt zum Ausgangspunkt S zurück.

Klassenstufen 11–13

Teil a) Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit sei angenommen, dass die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 und P_6 in dieser Reihenfolge auf dem Kreis liegen, vgl. Abbildung 1.

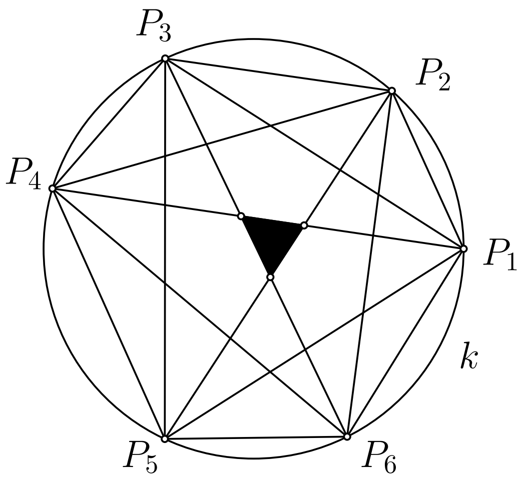


Abbildung 1

Bei einem laut Aufgabenstellung erlaubten Dreieck liegen die drei Seiten auf Verbindungsstrecken $\overline{P_aP_{a'}}$, $\overline{P_bP_{b'}}$ und $\overline{P_cP_{c'}}$. Da die Schnittpunkte jeweils innere Punkte des Kreises sein sollen, kann dabei keiner der Punkte $P_1, \ldots, P_6$ zwei dieser Strecken begrenzen. Folglich sind $P_a, P_{a'}, P_b, P_{b'}, P_c, P_{c'}$ exakt die sechs Punkte $P_1, \ldots, P_6$, nur eventuell in anderer Reihenfolge.

Die Strecke $\overline{P_aP_{a'}}$ teilt dabei den Kreis k in zwei Kreisbögen k' und k''. Damit die Strecken $\overline{P_bP_{b'}}$ und $\overline{P_cP_{c'}}$ die Strecke $\overline{P_aP_{a'}}$ schneiden können, muss deshalb bei beiden jeweils ein Endpunkt dem Kreisbogen k' angehören und der andere dem Kreisbogen k''. Nur die Verbindungsstrecken $\overline{P_1P_4}$, $\overline{P_2P_5}$ und $\overline{P_3P_6}$ haben jedoch die Eigenschaft, den Kreis k so zu teilen, dass beide Kreisbögen jeweils zwei der verbleibenden vier Punkte enthalten. Es kann folglich höchstens ein Dreieck im Sinne der Aufgabenstellung geben.

Andererseits liegen die drei Schnittpunkte von $\overline{P_1P_4}$, $\overline{P_2P_5}$ und $\overline{P_3P_6}$ im Innern des Kreises und bestimmen damit ein erlaubtes Dreieck. Es gibt im Falle $n = 6$ also genau ein Dreieck im Sinne der Aufgabenstellung, siehe Abbildung 1.

Teil b) Jedes erlaubte Dreieck hat seine Seiten auf Strecken $\overline{P_aP_{a'}}$, $\overline{P_bP_{b'}}$ und $\overline{P_cP_{c'}}$, die zu genau sechs der Punkte $P_1, \ldots, P_7$ gehören. Umgekehrt zeigt die Lösung zu Teil a), dass jede Auswahl von sechs der gegebenen sieben Punkte zu genau einem erlaubten Dreieck Anlass gibt.

Folglich gibt es genau sieben erlaubte Dreiecke, denn es gibt genau sieben Möglichkeiten, aus $P_1, \ldots, P_7$ sechs Punkte auszuwählen.

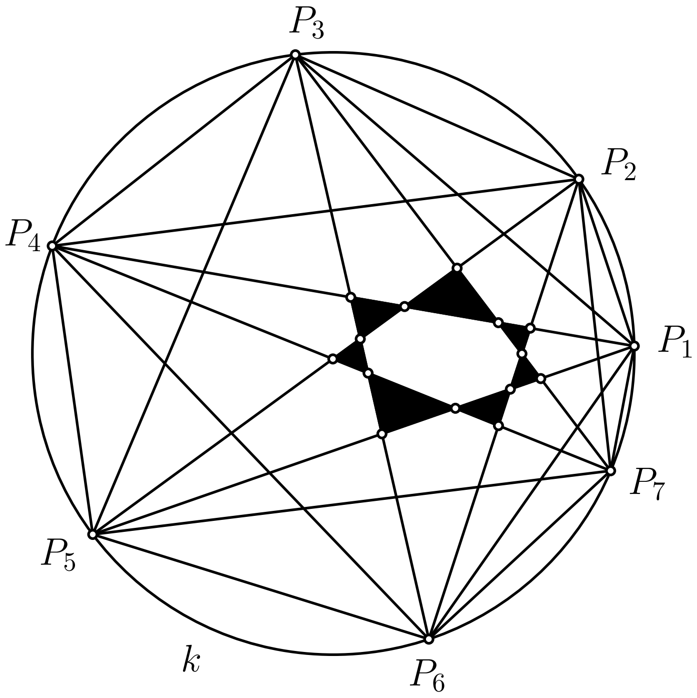


Abbildung 2

Teil c) Wiederum hat jedes erlaubte Dreieck seine Seiten auf Verbindungsstrecken $\overline{P_aP_{a'}}$, $\overline{P_bP_{b'}}$ und $\overline{P_cP_{c'}}$, die zu genau sechs der Punkte $P_1, \ldots, P_n$ gehören. Weiterhin zeigt die Lösung zu Teil a), dass jede Auswahl von sechs der gegebenen n Punkte zu genau einem erlaubten Dreieck führt. Folglich gibt es genau

$$\binom{n}{6} = \frac{n!}{6!\,(n-6)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

erlaubte Dreiecke, denn dies ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus den Punkten $P_1, \ldots, P_n$ genau sechs auszuwählen, siehe Abbildung 2.

Bemerkung: Es ist selbstverständlich korrekt, wenn Teilnehmer Teil c) vorziehen und daraus die Antworten zu Teil b) und gegebenenfalls auch Teil a) als Spezialfall herleiten.