# MO-Tage

## Serie 7 – Lösungen

## Klassenstufe 3

*Teil a)*

| | | |
|---|---|---|
| ADG | BDG | CDG |
| ADH | BDH | CDH |
| AEG | BEG | CEG |
| AEH | BEH | CEH |
| AFG | BFG | CFG |
| AFH | BFH | CFH |

*Teil b)* Nein, er kann den Balkon nicht erreichen, da in den Raum mit Balkon zwei Türen (eine gerade Anzahl Türen) führen.

## Klassenstufe 4

a) Die Tante von Peter feiert den 20. Geburtstag, da $1000 : 52 = 19$ Rest 12 ist oder weil $19 \cdot 52 = 988 < 1000 < 1040 = 20 \cdot 52$ gilt.

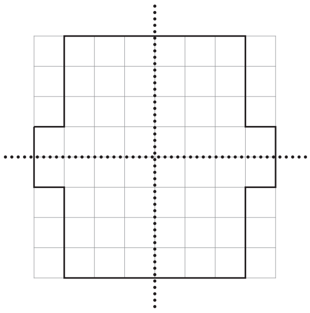
b) Der Bruder feiert seinen 3. Geburtstag, da $2 \cdot 365 = 730 < 1000 < 1095 = 3 \cdot 365$ gilt.

c) Wegen $41 \cdot 24 = 984 < 1000 < 1008 = 42 \cdot 24$ ist seine Schwester seit 41 Tagen auf der Welt. Wegen $5 \cdot 7 = 35 < 41 < 42 = 6 \cdot 7$ sind seit der Geburt 5 ganze Wochen vergangen.

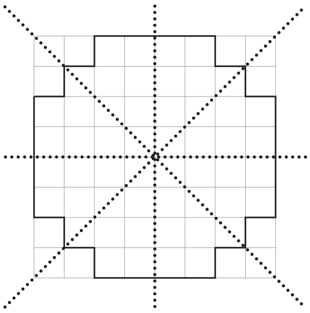
## Klassenstufe 5

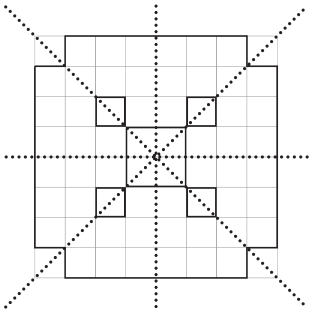
Für die Beispiele der drei Aufgabenteile, werden die Spiegelachsen jeweils gepunktet dargestellt.

*Teil a)*

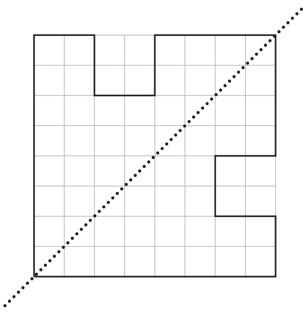


*Teil b)*





*Teil c)*



Da nur eine Figur anzugeben ist, beschränken wir uns auf solche Lösungen, bei denen die fehlenden 12 Kästchen auch drei $2 \times 2$-Quadrate bilden. Eines der drei fehlenden $2 \times 2$-Quadrate muss auf einer der vier Achsen aus b) liegen, die beiden anderen müssen bezüglich dieser Achse zueinander spiegelsymmetrisch sein – wie das Beispiel zeigt – oder auch beide auf dieser Achse liegen.

# Klassenstufe 6

*Teil a*) Es gibt insgesamt 48 verschiedene Lösungen. Hier nur zwei Beispiele:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |

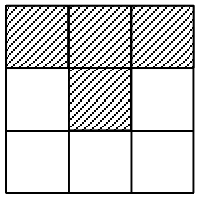
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |

*Bemerkung:* Alle weiteren Lösungen ergeben sich aus diesen beiden Lösungen durch Permutation der Zahlen 1, 2, 3 und 4.

*Teil b*) Hier gibt es an die tausend Möglichkeiten, z. B.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 4 | 5 | 3 | 1 |
| 5 | 3 | 2 | 1 | 4 |
| 3 | 1 | 4 | 5 | 2 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 5 | 4 | 1 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 5 | 1 |
| 5 | 4 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 1 | 5 | 2 | 4 |



*Teil c*) Von den vier gestreiften Feldern liegen je zwei entweder in derselben Zeile, derselben Spalte oder derselben Diagonalen. Daher darf keine Zahl in diesen vier Kästchen doppelt vorkommen. Mit 1, 2 und 3 gibt es aber nur drei verschiedene Zahlen. Folglich kann es Stefanie nicht gelingen, in die Felder eines $3 \times 3$-Quadrats die Zahlen 1, 2 und 3 wie gefordert einzutragen.

# Klassenstufe 7

*Teil a*) Siehe Abbildung 1.

*Teil b*) Vermutung: Der Umfang des Rechtecks ist doppelt so groß wie die Kathetenlänge.

Es seien $x = |AR|$ und $y = |AS|$. Für den Umfang $u$ des Rechtecks $ARPS$ gilt

$$u = 2 \cdot (x + y)\,. \tag{1}$$

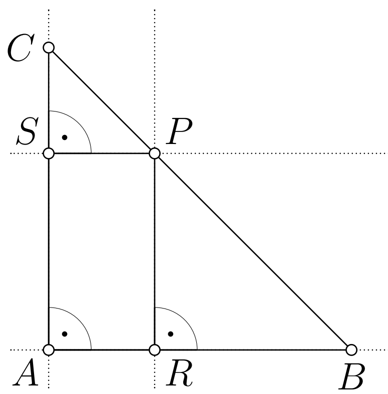



Abbildung 1

Nach Voraussetzung ist das Dreieck $ABC$ gleichschenklig und rechtwinklig. Nach Voraussetzung sind $PS$ und $AB$ parallel zueinander. Nach dem Stufenwinkelsatz gilt daher

$$|\sphericalangle PSC| = |\sphericalangle BAC| = 90^\circ .$$

Nach dem Basis- und dem Innenwinkelsatz folgt $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle ACB| = 45^\circ$ und hieraus nach dem Stufenwinkelsatz $|\sphericalangle CPS| = |\sphericalangle CBA| = 45^\circ$. Nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes ist das Dreieck $CSP$ gleichschenklig und rechtwinklig und es gilt

$$|CS| = |PS| = x . \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$u = 2 \cdot (x + y) = 2 \cdot (|CS| + |AS|) = 2 \cdot |AC| .$$

Der Umfang des Rechtecks ist folglich doppelt so groß wie die Kathetenlänge.

## Klassenstufe 8

Wir bezeichnen die Anzahlen der Münzen, die Anton, Bernd, Claus, Daniel und Eugen erhalten haben, in dieser Reihenfolge mit $a$, $b$, $c$, $d$ und $e$. Nach der Aufgabenstellung gilt dann

$$0 < a < b < c < d < e \tag{1}$$

und

$$a + b + c + d + e = n . \tag{2}$$

Da $a$, $b$, $c$, $d$ und $e$ ganze Zahlen sind und wegen (1) folgt $a \geq 1$, $b \geq 2$, $c \geq 3$, $d \geq 4$ und $e \geq 5$. Hieraus und aus (2) folgt $n = a + b + c + d + e \geq 15$.

Wir erfassen daher nun tabellarisch ab $n = 15$, welche den Bedingungen (1) und (2) genügenden Anzahlen $a$, $b$, $c$, $d$ und $e$ möglich sind. Um zu entscheiden, wer gegebenenfalls die Anzahl der Münzen eindeutig ermitteln kann, braucht man nur in den zur betrachteten Anzahl $n$ an Münzen gehörenden Zeilen zu schauen, ob es eine Spalte gibt, bei der eine Zahl $z$ nur einmal auftritt. (Diese Zahlen sind in der Tabelle fett markiert.) Der zu dieser Spalte gehörende Freund kann die Zeile mit dieser Zahl $z$ und daher diese Verteilung der Münzen eindeutig erkennen.

| $n$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | Wer? |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | jeder |
| 16 | **1** | **2** | **3** | **4** | **6** | jeder |
| 17 | 1 | 2 | 3 | **4** | **7** | Daniel, Eugen |
| 17 | 1 | 2 | 3 | **5** | **6** | Daniel, Eugen |
| 18 | 1 | 2 | 3 | **4** | **8** | Daniel, Eugen |
| 18 | 1 | 2 | 3 | 5 | **7** | Eugen |
| 18 | 1 | 2 | **4** | 5 | **6** | Claus, Eugen |
| 19 | 1 | 2 | 3 | **4** | **9** | Daniel, Eugen |
| 19 | 1 | 2 | 3 | 5 | **8** | Eugen |
| 19 | 1 | 2 | 3 | **6** | 7 | Daniel |
| 19 | 1 | 2 | 4 | 5 | 7 | niemand |
| 19 | 1 | **3** | 4 | 5 | **6** | Bernd, Eugen |

Bei $n \in \{15, 16, 17, 18\}$ kann in jedem der auftretenden Fälle mindestens einer der Freunde die Verteilung der Münzen erkennen.

Bei $n = 19$ kann keiner der Freunde die Verteilung $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$, $d = 5$ und $e = 7$ erkennen, da Anton in weiteren vier Fällen nur eine Münze hat, Bernd in weiteren drei Fällen genau 2 Münzen hat, Claus in einem weiteren Fall auch genau 4 Münzen hat, Daniel in zwei weiteren Fällen auch genau 5 Münzen hat und Eugen in einem weiteren Fall auch genau 7 Münzen hat.

Daher ist $n = 19$ die kleinste Zahl, zu der es eine Verteilung gibt, bei der keiner der Freunde aus diesen Angaben eindeutig herausfinden kann, wie viele Münzen die einzelnen Freunde erhalten haben.

# Klassenstufe 9

Es bezeichne $n = [abcde]$ die Zifferndarstellung der Zahl $n$ im Dezimalsystem. Dann gilt also

$$n = a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^1 + e \cdot 10^0 .$$

*Teil a)* Zu lösen ist die Gleichung

$$[abcde] - [pqrst] = 2017 ,$$

wobei jeder Buchstabe eine Ziffer bezeichne und alle Ziffern paarweise verschieden sind. Wegen

$$0 < [abcde] - [pqrst] < 10\,000$$

folgt

$$a = p + 1 \tag{1}$$

und $[qrst] - [bcde] = 10000 - 2017 = 7983$. Hieraus folgt $q - b \in \{7, 8\}$. Aus $q - b = 7$ würde folgen, dass $q \geq 7$ und $[rst] - [cde] = 983$ gilt, was nicht sein kann, weil $[rst] < 987$ und $[cde] \geq 012$ gilt. Folglich muss $q - b = 8$ gelten, also

$$(q, b) = (8, 0) \quad \text{oder} \quad (q, b) = (9, 1) . \tag{2}$$

In jedem Fall gilt $[cde] - [rst] = 1000 - 983 = 17$. Wegen $0 < [cde] - [rst] < 100$ folgt

$$c = r + 1 \tag{3}$$

und daher $[st] - [de] = 100 - 17 = 83$. Also gilt $s - d \in \{8, 9\}$. Allerdings würde aus $s - d = 9$ folgen, dass $s = 9$ und $d = 0$ gilt, was aber (2) widerspricht. Folglich gilt $s - d = 8$ und damit

$$(s, d) = (9, 1) \quad \text{oder} \quad (s, d) = (8, 0) , \tag{4}$$

je nachdem, welcher Fall in (2) gilt. Man erhält schließlich noch

$$t - e = 3 . \tag{5}$$

Aus (2) und (4) ergibt sich, dass $\{q, b, d, s\} = \{0, 1, 8, 9\}$ und $\{a, p, r, c, e, t\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ gelten muss. Wegen (5) gibt es drei Fälle:

*Fall 1:* Wenn $(t, e) = (5, 2)$ ist, dann sind wegen (1) und (3) die Paare $(a, p)$ und $(c, r)$ gleich den Paaren $(4, 3)$ und $(7, 6)$.

*Fall 2:* Wenn $(t, e) = (6, 3)$ ist, dann gibt es wegen (1) und (3) keine Lösungen.

*Fall 3:* Wenn $(t, e) = (7, 4)$ ist, dann sind wegen (1) und (3) die Paare $(a, p)$ und $(c, r)$ gleich den Paaren $(3, 2)$ und $(6, 5)$.

Daher gibt es die folgenden acht Lösungen:

$$40712 - 38695 = 2017\,, \qquad 70412 - 68395 = 2017\,,$$
$$41702 - 39685 = 2017\,, \qquad 71402 - 69385 = 2017\,,$$
$$30614 - 28597 = 2017\,, \qquad 60314 - 58297 = 2017\,,$$
$$31604 - 29587 = 2017 \quad \text{und} \quad 61304 - 59287 = 2017\,.$$

*Hinweis:* Wenn nicht alle Bedingungen für die Ziffern erkannt werden, ist es möglich, die Lösung durch teilweises Probieren zu finden. In diesem Fall ist zu zeigen, dass es keine weiteren Lösungen geben kann.

*Teil b)* Wie im Teil a) erhält man die Gleichungen (1) bis (4), lediglich (5) wird ersetzt durch

$$t - e = 4\,. \tag{5'}$$

Wegen (1) bis (4) ist in jedem der Paare $(a, p)$, $(b, d)$, $(c, r)$ und $(q, s)$ genau eine Ziffer gerade und eine Ziffer ungerade; die Ziffern $(t, e)$ haben aber die gleiche Parität. Dies widerspricht der Forderung, dass unter den Ziffern $a, b, c, d, e, p, q, r, s, t$ gleich viele gerade wie ungerade Ziffern sein sollen. Daher gibt es hier keine Lösung.

## Klassenstufe 10

Jede Zahl $n$ mit $Q(n) = 57$ hat wenigstens 7 Stellen, denn die höchstens 6-stellige Zahl mit der größten Quersumme 999 999 hat die Quersumme $6 \cdot 9 = 54 < 57$. Die kleinste Zahl mit $Q(n) = 57$ ist 3 999 999.

Da die Zahl 57 die Primfaktorenzerlegung $57 = 3 \cdot 19$ besitzt, ist eine Zahl genau dann durch 57 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 19 teilbar ist. Die Zahl 3 999 999 ist wie alle anderen Zahlen mit der Quersumme 57 zwar durch 3 teilbar, aber sie ist kein Vielfaches von 19.

Die nächstgrößeren Zahlen mit der Quersumme 57 sind 4 899 999, 4 989 999, 4 998 999, 4 999 899, 4 999 989, 4 999 998 (alle nicht durch 19 teilbar); es folgen 5 799 999, 5 889 999, 5 898 999 und 5 899 899. Von denen wiederum ist nur $m_1 = 5\,899\,899$ durch 57 teilbar (es gilt $5\,899\,899 = 57 \cdot 103\,507$).

Es gibt also mindestens eine ganze Zahl, die ebenso wie ihre eigene Quersumme durch 57 teilbar ist. Die obige Vorgehensweise stellt sicher, dass 5 899 899 die kleinste positive ganze Zahl mit der geforderten Eigenschaft ist.

Es gibt weitere Zahlen mit der geforderten Eigenschaft, etwa die durch Aneinanderhängen von zwei Exemplaren vom $m_1$ entstehende Zahl $m_2 = 58\,998\,995\,899\,899$, denn es gilt

$$58\,998\,995\,899\,899 = 57 \cdot 1\,035\,070\,103\,507 \quad \text{und} \quad Q(m) = 2 \cdot 57 = 114\,.$$

Eine weitere Lösung ist die Zahl 5757. . .5757, die durch 57-faches Aneinanderreihen der Zahl 57 entsteht. Sie lässt sich als Produkt $57 \cdot 1010...101$ schreiben und ist daher durch 57 teilbar. Die Quersumme ist $(5 + 7) \cdot 57$ und somit ebenfalls durch 57 teilbar.

Es gibt unendlich viele Lösungen. Weitere Lösungen findet man beispielweise durch Anhängen von Nullen an schon gefundene Lösungen sowie durch weiteres systematisches Probieren, eventuell auch unter Zuhilfenahme von Computerprogrammen.

## Klassenstufen 11–13

Angenommen, $a$, $b$, $c$, $d$ erfüllen die Bedingungen (1)–(4).

Durch Subtraktion der Gleichung (2) von Gleichung (4) erhält man $4a = d - 3$, also $d = 4a + 3$. Setzt man dies in (3) ein, so folgt $c = 4a - 1$, und damit ergibt sich aus (2) schließlich $b = 2a + 1$. Bei Vorgabe von $a$ können also $b, c$ und $d$ aus den Gleichungen

$$b = 2a + 1, \quad c = 4a - 1, \quad d = 4a + 3$$

bestimmt werden.

Wegen (1) und der Ganzzahligkeit von $a$ ist $a \geq 11$ und damit $b \geq 23$, $c \geq 43$ und $d \geq 47$. Insbesondere sind alle vier Zahlen positiv und es folgt

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \geq 11 \cdot b \cdot c \cdot d \geq 11 \cdot 23 \cdot c \cdot d \geq 11 \cdot 23 \cdot 43 \cdot d \geq 11 \cdot 23 \cdot 43 \cdot 47.$$

Das Produkt am Beginn dieser Ungleichungskette ist genau dann gleich dem Wert am Ende der Kette, wenn an allen Stellen das Gleichheitszeichen gilt. Als einzige Lösung ergibt sich damit

$$a = 11, \quad b = 23, \quad c = 43, \quad d = 47.$$

Das Produkt $a \cdot b \cdot c \cdot d$ hat in diesem Fall den Wert $11 \cdot 23 \cdot 43 \cdot 47 = 511313$.