BUNDESWEITE MATHEMATIK-WETTBEWERBE
Bildung & Begabung

MO-Tage

Die neuen MO-Tage sind MO-ntag und MO-nnerstag.

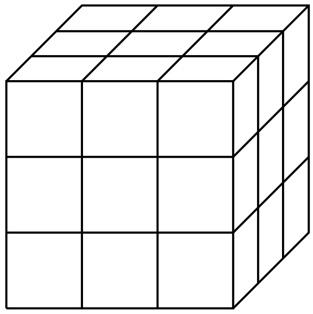
Liebe Schülerinnen und Schüler,

die aktuelle Corona-Krise beschäftigt auch uns Mathe-Fans. Damit ihr während dieser schweren Zeit nicht auf mathematische Herausforderungen verzichten müsst, haben wir, der Verein Mathematik-Olympiaden e.V. und das Talentförderzentrum Bildung & Begabung, die MO-Tage ins Leben gerufen.
Ab sofort veröffentlichen wir zweimal pro Woche ein Aufgabenblatt mit kniffligen Aufgaben aus den Mathematik-Olympiaden der vergangenen Jahre – jeden MO-ntag und MO-nnerstag. Pro Klassenstufe gibt es eine Aufgabe, sodass jede und jeder die eigene Schwierigkeitsstufe für sich selbst wählen kann. Zusätzlich zu dem Aufgabenblatt veröffentlichen wir außerdem ein Lösungsblatt zum letzten Aufgabenblatt.
Viel Spaß!

Serie 8 – Aufgaben

Die Lösungen werden am 23.04.2020 veröffentlicht.

Klassenstufe 3



27 kleine Würfel werden zu einem großen Würfel zusammengesetzt.

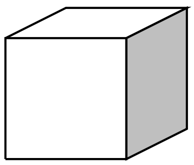
a) Aus wie vielen kleinen Quadraten besteht die Oberfläche des großen Würfels?

Nun wird von jeder Ecke des großen Würfels genau ein kleiner Würfel weggenommen.

b) Aus wie vielen kleinen Würfeln besteht der Restkörper?

c) Aus wie vielen kleinen Quadraten besteht seine Oberfläche?

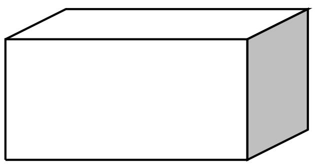
Klassenstufe 4



a) Ein großer Würfel wurde aus kleineren Würfeln zusammengesetzt. Wenn du eine Seitenfläche des großen Würfels betrachtest, siehst du 4 Quadrate.
Aus wie vielen kleinen Würfeln besteht der große Würfel?

b) Aus wie vielen kleinen Würfeln besteht ein großer Würfel, wenn du auf einer Seitenfläche des großen Würfels 25 Quadrate siehst?

c) Wie viele Würfel mit der Seitenlänge von 1 cm braucht man, um einen Quader mit einer Länge von 10 cm, einer Breite von 6 cm und einer Höhe von 4 cm zu bauen?



d) Wie viele Würfel mit der Seitenlänge von 2 cm braucht man für denselben Quader?

Klassenstufe 5

Isabel gibt sich auf Kästchenpapier eine Anzahl von Punkten vor. Sie möchte alle möglichen Quadrate finden, deren Eckpunkte ausschließlich auf solchen vorgegebenen Punkten liegen.

a) In der ersten Figur gibt sich Isabel 18 Punkte vor (siehe Abbildung 1). Isabel kann in diese Figur Quadrate verschiedener Größe einzeichnen.
Zeichne für jede Größe jeweils ein Beispielquadrat und gib an, wie viele Quadrate sie von der jeweiligen Größe einzeichnen kann.

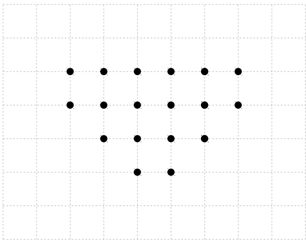


Abbildung 1

b) In der zweiten Figur gibt sich Isabel 28 Punkte vor (siehe Abbildung 2). Zeichne wieder für jede Größe der möglichen Quadrate jeweils ein Beispielquadrat ein und gib an, wie viele es von der jeweiligen Größe gibt.

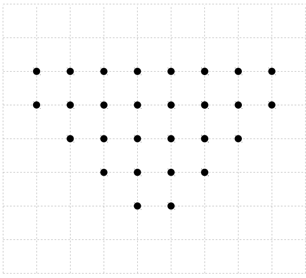


Abbildung 2

Klassenstufe 6

Die drei Freunde Justin, Hennes und Lorenz erhalten verschieden hohe Taschengeldbeträge und haben unterschiedliche Lieblingsbeschäftigungen.

Folgendes sei bekannt:

(1) Die Nachnamen der Jungen in alphabetischer Reihenfolge sind Brause, Müller und Sauerbier.
(2) Sie erhalten entweder 8 €, 12 € oder 20 € als Taschengeld.
(3) Ihre Lieblingsbeschäftigungen sind entweder „Freunde treffen", „Computer spielen" oder „Sport treiben".
(4) Justin treibt gern Sport und er bekommt weniger Taschengeld als sein Freund mit dem Nachnamen Müller.
(5) Hennes erhält 12 € Taschengeld.
(6) Lorenz spielt nicht gern am Computer.
(7) Lorenz und sein Freund mit dem Nachnamen Brause bekommen beide nicht 8 € Taschengeld.

a) Ermittle die Zuordnung der Vornamen zu den Taschengeldbeträgen.

b) Ordne jedem Jungen seinen richtigen Nachnamen, die Höhe seines Taschengeldes und seine Lieblingsbeschäftigung zu.
   Weise nach, dass man diese Zuordnungen aus den angegebenen Bedingungen eindeutig ermitteln kann.

Klassenstufe 7

Wir betrachten dreistellige, durch 9 teilbare natürliche Zahlen und ihre Quersummen.

a) Bernd behauptet: „Die Quersumme einer jeden dreistelligen, durch 9 teilbaren natürlichen Zahl ist entweder 9 oder 18.“ Lisa entgegnet: „Deine Behauptung ist falsch. Es gibt genau eine Ausnahme.“

   Untersuche, ob einer von den beiden Recht hat.

b) Ermittle die Anzahl aller durch 9 teilbaren, dreistelligen natürlichen Zahlen z, für die gilt: Die Quersumme der Zahl $z + 9$ ist gleich dem Doppelten der Quersumme von z.

c) Ermittle die Anzahl aller durch 9 teilbaren, dreistelligen natürlichen Zahlen z, für die gilt: Die Quersumme der Zahl $z + 9$ ist gleich der Hälfte der Quersumme von z.

Hinweis: Die Quersumme einer Zahl ist die Summe ihrer Ziffern. Die Quersumme einer Zahl z kannst du mit $\mathrm{QS}(z)$ abkürzen. Es gelten beispielsweise $\mathrm{QS}(630) = 6 + 3 + 0 = 9$ und $\mathrm{QS}(630 + 9) = \mathrm{QS}(639) = 6 + 3 + 9 = 18 = 2 \cdot \mathrm{QS}(630)$.

Klassenstufe 8

Ermittle alle Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen a und b, für die $5 \cdot a + 6 \cdot b + 56 = a \cdot b$ gilt.

Klassenstufe 9

Wir sagen, zwei reelle Zahlen sind *krass verschieden*, wenn sie in keiner Nachkommastelle übereinstimmen. Beispielsweise sind die Zahlen $\frac{1}{4} = 0{,}25 = 0{,}25\overline{0} = 0{,}2500\ldots$ und $\frac{1}{11} = 0{,}\overline{09}$ nicht krass verschieden, da beide die gleiche dritte Nachkommastelle 0 haben. Die Zahlen $\frac{7}{30} = 0{,}2\overline{3}$ und $\frac{1}{8} = 0{,}125\overline{0}$ dagegen sind krass verschieden.

Wir betrachten nun Paare (a, b) ganzer Zahlen mit $a, b \geq 2$. Ein solches Paar nennen wir *gut*, wenn jede der Zahlen $\frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \ldots, \frac{a-1}{a}$ von jeder der Zahlen $\frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \ldots, \frac{b-1}{b}$ krass verschieden ist.

a) Ist das Paar $(5, 7)$ gut?

b) Bestimmen Sie alle guten Paare (a, b) mit $a = 2$.

c) Bestimmen Sie alle guten Paare (a, b).

Hinweis: Keine Dezimaldarstellung endet mit lauter Neunen.

Klassenstufe 10

Es sei ABC ein Dreieck mit $|AC| < |BC|$. Die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei C schneide die Seite $\overline{AB}$ in einem Punkt P, die Außenwinkelhalbierende desselben Winkels schneide die Gerade AB in einem Punkt Q. Die Parallele zu AC durch B schneide die Gerade CP in R.

a) Beweisen Sie, dass das Dreieck PCQ rechtwinklig und das Dreieck RBC gleichschenklig ist.

b) Beweisen Sie, dass $|AP| : |PB| = |AC| : |CB|$ gilt.

c) Beweisen Sie, dass $|AQ| : |BQ| = |AC| : |CB|$ gilt.

d) Es gelte $|\sphericalangle ACB| = 90°$, $|AC| = 3$ und $|BC| = 4$.
Bestimmen Sie das Verhältnis $|QC| : |CP|$!

Hinweis: In jeder der Teilaufgaben a) – c) ist die Ausführung eines Beweises verlangt. Das bloße Zitieren eines bekannten Satzes genügt hier nicht.

Klassenstufen 11–13

Es seien a, b, c und d vier nichtnegative reelle Zahlen mit $a + b + c + d = 1$. Man zeige, dass die sechs Zahlen

$$\sqrt{a} + \sqrt{b},\ \sqrt{a} + \sqrt{c},\ \sqrt{a} + \sqrt{d},\ \sqrt{b} + \sqrt{c},\ \sqrt{b} + \sqrt{d} \text{ und } \sqrt{c} + \sqrt{d}$$

nicht sämtlich kleiner als 1 sein können.