BUNDESWEITE MATHEMATIK-WETTBEWERBE
Bildung & Begabung

MO-Tage

Serie 8 – Lösungen

Klassenstufe 3

a) Die Oberfläche besteht aus 54 kleinen Quadraten (6 mal 9 Quadrate).
b) Der Restkörper besteht aus 19 kleinen Würfeln ($27 - 8 = 19$).
c) Die Oberfläche besteht weiterhin aus 54 kleinen Quadraten. Drei sichtbare Flächen jedes Eckwürfels werden entfernt. Dafür wird je eine Fläche der drei benachbarten Würfel sichtbar.

Klassenstufe 4

a) Der große Würfel besteht aus 8 kleineren Würfeln, denn es ist $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.
b) Der große Würfel besteht aus 125 kleineren Würfeln, denn es ist $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.
c) Der Quader besteht aus 240 Würfeln, denn es ist $10 \cdot 6 \cdot 4 = 240$.
d) Der Quader besteht aus 30 Würfeln. Dies folgt aus $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ bzw. $240 : 8 = 30$.

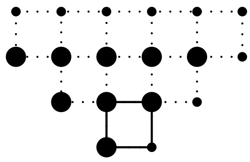
Klassenstufe 5

Wesentlich ist zunächst die Erkenntnis, dass es nicht nur Quadrate gibt, deren Seiten auf den Gitterlinien liegen, sondern auch schräg liegende Quadrate. Mit Q1 bezeichnen wir ein Quadrat mit dem Flächeninhalt eines Kästchens, mit Q4 ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von 4 Kästchen usw.

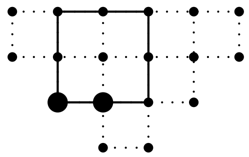
Den folgenden (im Arbeitsblatt festgehaltenen) Figuren ist zu entnehmen, dass es im Teil a) 5 verschiedene Quadrate und im Teil b) 7 Quadrate gibt, die nicht durch Verschiebung ineinander überführt werden können und welche die gestellten Bedingungen erfüllen. Jeweils zwei von ihnen sind aber kongruent, sodass es im Teil a) 4 verschiedene Werte für den Flächeninhalt und im Teil b) 6 verschiedene Werte gibt.

Durch die fett gezeichneten Punkte ist in den Figuren zusätzlich festgehalten, wie man die Anzahl der entsprechenden Quadrate jeweils systematisch ermitteln kann.

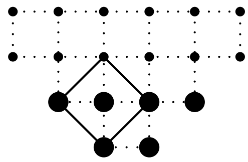
Teil a)



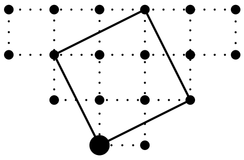
$1+3+5=9$



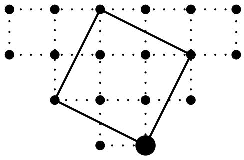
2



$2+4=6$

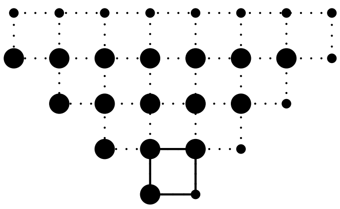


1

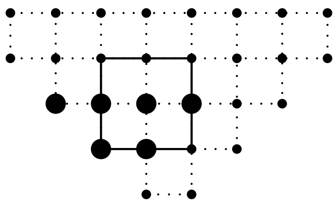


1

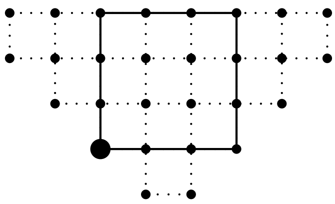
Teil b)



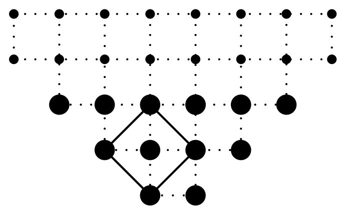
$1+3+5+7=16$



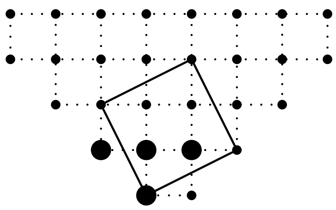
$2+4=6$



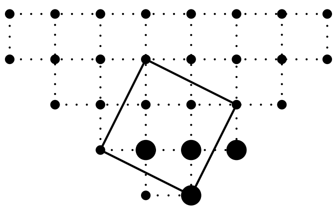
1



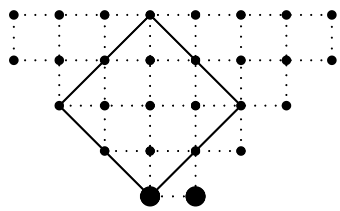
$2+4+6=12$



$1+3=4$



$1+3=4$



2

Das Gesamtergebnis in übersichtlicher Form lautet

für a)

Typ des Quadrates	$Q1$	$Q4$	$Q2$	$Q5$
Anzahl	9	2	6	2

,

für b)

Typ des Quadrates	$Q1$	$Q4$	$Q9$	$Q2$	$Q5$	$Q8$
Anzahl	16	6	1	12	8	2

.

Klassenstufe 6

Teil a) Aus (2) und (5) folgt, dass Hennes 12 € erhält und Lorenz also nicht 12 € erhält.

Aus (7) folgt, dass Lorenz nicht 8 € erhält.

Als letzte Möglichkeit folgt hieraus mit (2):

Lorenz erhält 20 € und Justin erhält 8 €. (8)

Teil b) Aus (3) und (4) folgt, dass Justin gern Sport treibt und Lorenz also nicht gern Sport treibt.

Aus (6) folgt, dass Lorenz nicht gern am Computer spielt.

Als letzte Möglichkeit folgt hieraus:

Lorenz trifft gern Freunde und Hennes spielt gern am Computer. (9)

Aus (4) und (8) folgt, dass Justin nicht Müller heißt und Müller nicht 8 € erhält.

Aus (7) folgt, dass Lorenz nicht Brause heißt und Brause nicht 8 € erhält.

Hieraus und aus (1) folgt als letzte Möglichkeit:

Sauerbier erhält 8 €. (10)

Aus (8) und (10) folgt, dass Justin den Nachnamen Sauerbier hat.

Da Lorenz nicht Brause heißt, folgt hieraus als letzte Möglichkeit:

Lorenz heißt Müller und Hennes heißt Brause. (11)

Aus (4), (5), (8), (9), (10) und (11) folgt daher:

Justin Sauerbier erhält 8 € Taschengeld und treibt gern Sport.

Hennes Brause erhält 12 € Taschengeld und spielt gern am Computer.

Lorenz Müller erhält 20 € Taschengeld und trifft sich gern mit seinen Freunden.

Hinweis: Folgende Tabelle kann bei der Lösungsfindung hilfreich sein, eine exakte Darstellung der Lösung kann sie jedoch nicht ersetzen. Der Darstellung der Lösung muss nämlich zu entnehmen sein, an welchen Stellen und in welcher Reihenfolge die gegebenen Bedingungen benötigt werden, um Feststellungen abzuleiten. Ferner muss erkennbar sein, in welcher Reihenfolge die Feststellungen abgeleitet und später wieder verwendet werden. Dabei ist es günstig, den Feststellungen, die später noch benötigt werden, einen Namen zu geben.

Bei der Lösungsfindung beginnen wir mit den Voraussetzungen, die „positive" Aussagen enthalten, wie z. B. die Voraussetzung (5). Wir tragen in das zugehörige Feld der Tabelle ein „+/(5)" ein. Aus Bedingung (2) folgt dann, dass die anderen Jungen nicht 12 € Taschengeld erhalten, was in den zugehörigen Feldern durch „−/(2)" festgehalten wird. Analog verfahren wir mit der in (4) enthaltenen „positiven" Aussage.

Als Nächstes suchen wir eine Voraussetzung, die weitere Informationen über das Taschengeld enthält. Dies ist die in (7) enthaltene „negative" Aussage, die wir durch „−/(7)" in der Tabelle festhalten (siehe Abbildung 1). Da jetzt in der ersten Zeile und der dritten Spalte jeweils zwei „−" stehen, ist klar, dass in den noch leeren beiden Feldern ein „+" stehen muss.

Beim Ermitteln der Zuordnung der Nachnamen zu den Vornamen tritt eine Schwierigkeit auf. Man benötigt noch eine weitere Tabelle, welche die Zuordnung zwischen Taschengeld und Nachnamen festhält. Wenn man erkennt, dass Jens und Sauerbier 8 € erhalten, kann man folgern, dass Jens den Nachnamen Sauerbier hat.

Auf diese Weise lassen sich alle Felder der Tabellen füllen und man hat den in obiger Darstellung beschrittenen Lösungsweg gefunden (siehe Abbildung 2 und Abbildung 3).

		Vornamen		
		Justin	Hennes	Lorenz
Taschengeld	8 €		− (2)	− (7)
	12 €	− (2)	+ (**5**)	− (2)
	20 €		− (2)	
Freizeit	Freunde	− (3)		
	Computer	− (3)		
	Sport	+ (**4**)	− (3)	− (3)
Nachnamen	Brause			
	Müller			
	Sauerbier			

Abbildung 1

	Vornamen		
	Justin	Hennes	Lorenz
8 €	+ (**8**)	− (2)	− (7)
12 €	− (2)	+ (**5**)	− (2)
20 €	− (8)	− (2)	+ (**8**)
Freunde	− (3)	− (9)	+ (**9**)
Computer	− (3)	+ (**9**)	− (6)
Sport	+ (**4**)	− (3)	− (3)
Brause	− (1)	+ (**11**)	− (7)
Müller	− (1)	− (11)	+ (**11**)
Sauerbier	+ (**8**), (**10**)	− (1)	− (1)

Abbildung 2

	Brause	Müller	Sauerbier
8 €	− (7)	− (4)	+ (**10**)
12 €			
20 €			

Abbildung 3

Klassenstufe 7

Teil a) Die Quersumme einer dreistelligen, durch 9 teilbaren Zahl ist 9, 18 oder 27. Die Zahl 999 ist die einzige dreistellige, durch 9 teilbare Zahl mit $\mathrm{QS}(z) = 27$. Daher hat Lisa Recht, Bernd aber nicht.

Teil b) Es sei z eine dreistellige, durch 9 teilbare Zahl. Es gelte also

$$100 \leq z \leq 999\,, \quad 9 \mid z\,. \tag{1}$$

Weiter gelte

$$\mathrm{QS}(z+9) = 2 \cdot \mathrm{QS}(z)\,. \tag{2}$$

Wegen der Bedingung (1) ist $z+9$ eine durch 9 teilbare Zahl mit $109 \leq z+9 \leq 1008$. Daher ist $z+9$ wie z eine durch 9 teilbare, dreistellige Zahl oder es gilt $z+9=1008$. Folglich gilt

$$\mathrm{QS}(z) \in \{9, 18, 27\}\,, \quad \mathrm{QS}(z+9) \in \{9, 18, 27\}\,. \tag{3}$$

Aus der Bedingung (2) und den Beziehungen (3) folgt

$$\mathrm{QS}(z) = 9\,. \tag{4}$$

Wir machen eine Fallunterscheidung bezüglich der Einerziffer von z.

Fall 1: Die Einerziffer von z ist 0. Wegen Bedingung (1) und Gleichung (4) kann dann z nur eine der Zahlen

$$180\,, \quad 270\,, \quad 360\,, \quad 450\,, \quad 540\,, \quad 630\,, \quad 720\,, \quad 810\,, \quad 900 \tag{5}$$

sein. Jede dieser Zahlen ist tatsächlich eine dreistellige, durch 9 teilbare Zahl, welche der Bedingung (2) genügt.

Fall 2: Die Einerziffer von z ist nicht 0. Wegen Gleichung (4) kann die Zehnerziffer von z nicht 9 sein. Die Einerziffer von $z+9$ ist um 1 kleiner als die von z. Die Zehnerziffer von $z+9$ ist wegen des Zehnerübertrags und da die Zehnerziffer von z keine 9 ist, um 1 größer als die von z. Die Hunderterziffer von $z+9$ ist gleich der Hunderterziffer von z. Daher haben $z+9$ und z die gleiche Quersumme. Dies widerspricht wegen Gleichung (4) der Bedingung (2).

Folglich sind nur die 9 in (5) genannten Zahlen dreistellige, durch 9 teilbare Zahlen, welche der Bedingung (2) genügen. Die gesuchte Anzahl ist hier also 9.

Teil c) Es sei z eine dreistellige, durch 9 teilbare Zahl. Es gelten also wieder die Bedingung (1) und daher die Beziehungen (3). Weiter gelte nun

$$\mathrm{QS}(z+9) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{QS}(z)\,. \tag{6}$$

Aus den Beziehungen (3) und der Gleichung (6) folgt

$$\mathrm{QS}(z) = 18\,. \tag{7}$$

Wir machen eine Fallunterscheidung bezüglich der Einerziffer von z.

Fall 1: Die Einerziffer von z ist 0. Dann ist 9 die Einerziffer von $z+9$, während die Zehner- und Hunderterziffer von $z+9$ gleich der entsprechenden Ziffer von z sind. Es gilt daher $\mathrm{QS}(z+9) = \mathrm{QS}(z) + 9$. Dies und Gleichung (7) widersprechen der Bedingung (6).

Fall 2: Die Einerziffer von z ist nicht 0. Wenn die Zehnerziffer von z nicht 9 ist, dann haben z und $z+9$ die gleiche Quersumme, wie in Fall 2 in Teil b) zu sehen war. Wegen der Bedingung (6) und der Gleichung (7) muss daher 9 die Zehnerziffer von z sein. Wegen Bedingung (1) und Gleichung (7) kann dann z nur eine der Zahlen

$$198\,, \quad 297\,, \quad 396\,, \quad 495\,, \quad 594\,, \quad 693\,, \quad 792\,, \quad 891 \tag{8}$$

sein. Jede dieser Zahlen ist tatsächlich eine dreistellige, durch 9 teilbare Zahl, welche der Bedingung (6) genügt.

Folglich sind nur die 8 in (8) genannten Zahlen dreistellige, durch 9 teilbare Zahlen, welche der Bedingung (6) genügen. Die gesuchte Anzahl ist hier also 8.

Klassenstufe 8

I. Es seien a und b positive ganze Zahlen mit

$$5 \cdot a + 6 \cdot b + 56 = a \cdot b\,. \tag{1}$$

Aus der Gleichung (1) folgt $5 \cdot a + 56 = b \cdot (a-6)$. Hieraus folgt $5 \cdot (a-6) + 5 \cdot 6 + 56 = b \cdot (a-6)$ und daher

$$5 \cdot (a-6) + 86 = b \cdot (a-6)\,. \tag{2}$$

Da a eine positive Zahl ist, ist die linke Seite der Gleichung (2) größer als $5 \cdot (-6) + 86 = 56$. Da b auch positiv ist, muss daher $a > 6$ gelten. Da a und b ganze Zahlen sind, ist die rechte Seite der Gleichung (2) durch $a-6$ teilbar. Da auch $5 \cdot (a-6)$ durch $a-6$ teilbar ist, muss auch 86 durch $a-6$ teilbar sein. Folglich kann $a-6$ nur ein positiver Teiler von 86 sein. Da 86 die Primfaktorenzerlegung $86 = 2 \cdot 43$ besitzt, muss daher $a - 6 \in \{1, 2, 43, 86\}$, also $a \in \{7, 8, 49, 92\}$, gelten. Durch Einsetzen dieser Werte für a in die Gleichung (2) und Auflösen nach b folgt:

Wenn ein Paar (a, b) positiver ganzer Zahlen der Gleichung (1) genügt, dann kann es nur eines der Paare

$$(7, 91)\,, \quad (8, 48)\,, \quad (49, 7)\,, \quad (92, 6) \tag{3}$$

sein.

II. Offenbar sind die in (3) genannten Zahlenpaare Paare ganzer positiver Zahlen. Wie man durch Einsetzen leicht sieht, genügen sie auch alle der Gleichung (1).

Aus I. und II. folgt, dass die in (3) genannten Paare alle Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen sind, für die die Gleichung (1) gilt.

Klassenstufe 9

Teil a) Das Paar $(5,7)$ ist nicht gut, da zum Beispiel $\frac{1}{5} = 0{,}2\overline{0}$ und $\frac{2}{7} = 0{,}\overline{285714}$ in der ersten Nachkommastelle übereinstimmen.

Vorüberlegung für b) und c):

(1) Wenn eine der Zahlen a und b größer ist als 9, dann ist das Paar (a,b) nicht gut.

Ist zum Beispiel $a > 9$, dann gilt $\frac{1}{a} \leq 0{,}1$ und folglich ändert sich die erste Nachkommastelle bei Addition von $\frac{1}{a}$ höchstens um 1.

Andererseits gilt $\frac{a-1}{a} \geq 0{,}9$.

Hieraus folgt, dass jede der Ziffern $1, 2, \ldots, 9$ als erste Nachkommastelle von einem $\frac{i}{a}$ (mit $1 \leq i < a$) vorkommt; insbesondere auch die erste Nachkommastelle von $\frac{b-1}{b}$.

Teil b) b kann keine Zahl sein, für die eine der Zahlen $\frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \ldots, \frac{b-1}{b}$ ein endlicher Dezimalbruch ist, da die Nachkommastellen dieser Zahl wie bei $\frac{1}{2} = 0{,}5\overline{0}$ irgendwann null betragen. Daraus folgt, dass b keinen der Werte 2, 4, 5, 6 oder 8 annehmen kann.

Zu untersuchen sind für b also nur die Zahlen 3, 7 und 9.

Das Paar $(2,3)$ ist gut, da weder $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ noch $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ gemeinsame Nachkommastellen haben. Das Paar $(2,7)$ ist nicht gut, da $\frac{4}{7} = 0{,}\overline{571428}$ mit $\frac{1}{2} = 0{,}5\overline{0}$ in der ersten Nachkommastelle übereinstimmt. Auch das Paar $(2,9)$ ist nicht gut wegen $\frac{1}{2} = 0{,}5$ und $\frac{5}{9} = 0{,}\overline{5}$.

Damit ist $(2,3)$ das einzige gute Paar mit $a = 2$.

Teil c)

(2) Sind a und b beide in der Menge $\{2,4,6,7,8,9\}$ enthalten, dann ist das Paar (a,b) nicht gut.

In diesem Fall gibt es ein i mit $1 \leq i < a$, für welches die erste Nachkommastelle von $\frac{i}{a}$ gleich 5 ist, denn es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} &= 0{,}5\overline{0}\,, \\ \frac{4}{7} &= 0{,}\overline{571428}\,, \\ \frac{5}{9} &= 0{,}\overline{5}\,. \end{aligned}$$

Da dies entsprechend für b gilt, ist das Paar (a,b) nicht gut.

(3) Sind a und b beide in der Menge $\{3, 5, 6, 8, 9\}$ enthalten, dann ist das Paar (a, b) nicht gut.

In diesem Fall gibt es ein i mit $1 \leq i < a$, für welches die erste Nachkommastelle von $\frac{i}{a}$ gleich 6 ist, denn es gilt

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} &= 0{,}\overline{6}\,, \\ \frac{3}{5} &= 0{,}6\overline{0}\,, \\ \frac{5}{8} &= 0{,}625\overline{0}\,. \end{aligned}$$

Da dies entsprechend für b gilt, ist das Paar (a, b) nicht gut.

(4) Sind a und b beide in der Menge $\{2, 4, 5, 6, 8\}$ enthalten, dann ist das Paar (a, b) nicht gut.

In diesem Fall gibt es ein i mit $1 \leq i < a$, für welches die zweite Nachkommastelle von $\frac{i}{a}$ gleich 0 ist, denn es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} &= 0{,}5\overline{0}\,, \\ \frac{1}{5} &= 0{,}2\overline{0}\,. \end{aligned}$$

Da dies entsprechend für b gilt, ist das Paar (a, b) nicht gut.

(5) Sind a und b beide in der Menge $\{5, 7\}$ enthalten, dann ist das Paar (a, b) nicht gut.

In diesem Fall gibt es ein i mit $1 \leq i < a$, für welches die erste Nachkommastelle von $\frac{i}{a}$ gleich 2 ist, denn es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} &= 0{,}2\overline{0}\,, \\ \frac{2}{7} &= 0{,}\overline{285714}\,. \end{aligned}$$

Da dies entsprechend für b gilt, ist das Paar (a, b) nicht gut.

Angenommen, (a, b) ist ein gutes Paar. Dann folgt aus der Vorüberlegung, dass $a, b \leq 9$ gelten muss. Wegen (3), (4) und (5) ist keine der beiden Zahlen eine 5. Wegen (2) ist dann eine der Zahlen a oder b eine 3, und wegen (3) ist die andere Zahl eine 2, 4 oder 7.

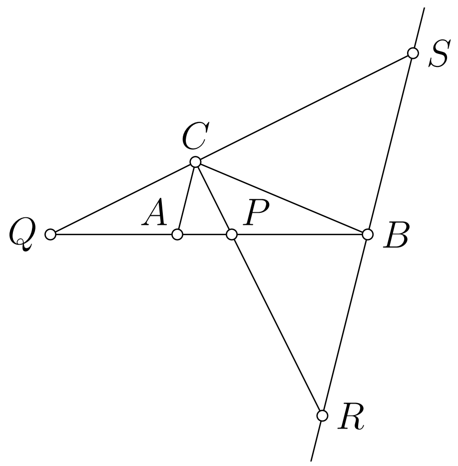
Es bleiben also nur noch die Paare
$(a, b) \in \{(2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (3, 7), (7, 3)\}$ zu betrachten.

Diese Paare sind aber wirklich alle gut, weil einerseits $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$ und $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$ gilt, andererseits aber keine Nachkommastelle von

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} = \frac{2}{4} &= 0{,}5\overline{0}\,, \\
\frac{1}{4} &= 0{,}25\overline{0}\,, \\
\frac{3}{4} &= 0{,}75\overline{0}\,, \\
\frac{1}{7} &= 0{,}\overline{142857}\,, \\
\frac{2}{7} &= 0{,}\overline{285714}\,, \\
\frac{3}{7} &= 0{,}\overline{428571}\,, \\
\frac{4}{7} &= 0{,}\overline{571428}\,, \\
\frac{5}{7} &= 0{,}\overline{714285}\,, \\
\frac{6}{7} &= 0{,}\overline{857142}
\end{aligned}$$

gleich 3 oder gleich 6 ist.

Klassenstufe 10



Teil a) Da sich die Größen eines Innenwinkels und eines der zugehörigen Außenwinkel zu 180° ergänzen, bilden ihre Winkelhalbierenden einen Winkel von 90°. Deshalb ist $\triangle PCQ$ rechtwinklig bei C. Da $\sphericalangle BRC$ und $\sphericalangle ACR$ Wechselwinkel an den Parallelen AC und BR sind und CR den Winkel ACB halbiert, gilt $|\sphericalangle BRC| = |\sphericalangle ACR| = |\sphericalangle RCB|$. Also ist $\triangle CBR$ gleichschenklig mit $|RB| = |CB|$.

Teil b) In der Strahlensatzfigur mit dem Zentrum P und den parallelen Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{RB}$ gilt $|AP| : |PB| = |AC| : |RB|$. Wegen $|RB| = |CB|$ (nach a)) folgt daraus die Behauptung.

Teil c) Da AC und BR parallel sind und QC die Gerade AC in C schneidet, schneidet QC auch BR. Sei S der Schnittpunkt von QC und BR. Dann liegt wegen $|\sphericalangle PCQ| = 90°$ der Punkt C auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser $\overline{RS}$ und B ist dessen Mittelpunkt wegen $B \in \overline{RS}$ und $|RB| = |CB|$. Also folgt auch $|CB| = |SB|$ und aus der Strahlensatzfigur mit Zentrum Q und den parallelen Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BS}$ damit

$$|AQ| : |QB| = |AC| : |BS| = |AC| : |CB| \,.$$

Teil d) Wegen b) und c) gilt mit den Voraussetzungen von d)

$$|AP| : |PB| = |AQ| : |BQ| = |AC| : |CB| = 3 : 4 \,.$$

Daraus folgt $|BQ| = \frac{4}{3}|AQ|$ und daher $|AB| = \frac{1}{3}|AQ|$ und weiter $|AP| = \frac{3}{7}|AB| = \frac{1}{7}|AQ|$. Da $|\sphericalangle ACP| = 45°$ gilt, ist AC auch Winkelhalbierende von $\sphericalangle QCP$, also folgt wegen b), angewandt auf $\triangle QPC$, dass $|QC| : |CP| = |QA| : |AP| = 7$ gilt.

Klassenstufen 11–13

Angenommen, alle sechs Summen wären kleiner als 1. Mit $s := \sqrt{a}$, $t := \sqrt{b}$, $u := \sqrt{c}$ und $v := \sqrt{d}$ hätten wir dann

$$s + t < 1 \,, \quad s + u < 1 \,, \quad s + v < 1 \,, \quad t + u < 1 \,, \quad t + v < 1 \,, \quad u + v < 1$$

und

$$s^2 + t^2 + u^2 + v^2 = 1 \,.$$

Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit sei s die größte der vier Zahlen. Dann gilt $1 \geq s^2 \geq \frac{1}{4}$, also $1 \geq s \geq \frac{1}{2}$.

Es folgen $t, u, v < 1 - s$ und damit $t^2, u^2, v^2 < (1 - s)^2$ sowie

$$s^2 + t^2 + u^2 + v^2 < s^2 + 3(1 - s)^2 = 4s^2 - 6s + 3 = 4\left(s - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} \,.$$

Wegen $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$ haben wir jedoch $\left|s - \frac{3}{4}\right| \leq \frac{1}{4}$, woraus sich sofort ergibt, dass die rechte Seite höchstens gleich 1 ist. Folglich muss $s^2 + t^2 + u^2 + v^2 < 1$ gelten. Dies ist ein Widerspruch.