

Die neuen MO-Tage sind MO-ntag und MO-nnerstag.

Liebe Schülerinnen und Schüler,

die aktuelle Corona-Krise beschäftigt auch uns Mathe-Fans. Damit ihr während dieser schweren Zeit nicht auf mathematische Herausforderungen verzichten müsst, haben wir, der Verein Mathematik-Olympiaden e.V. und das Talentförderzentrum Bildung & Begabung, die MO-Tage ins Leben gerufen.

Ab sofort veröffentlichen wir zweimal pro Woche ein Aufgabenblatt mit kniffligen Aufgaben aus den Mathematik-Olympiaden der vergangenen Jahre – jeden MO-ntag und MO-nnerstag. Pro Klassenstufe gibt es eine Aufgabe, sodass jede und jeder die eigene Schwierigkeitsstufe für sich selbst wählen kann. Zusätzlich zu dem Aufgabenblatt veröffentlichen wir außerdem ein Lösungsblatt zum letzten Aufgabenblatt.

Viel Spaß!

## Serie 9 – Aufgaben

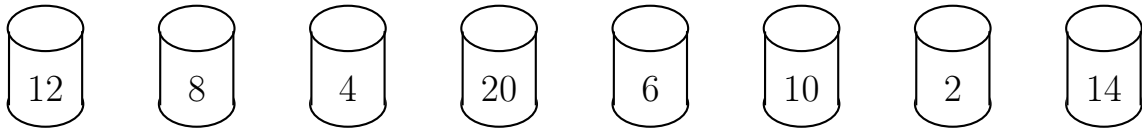
Die Lösungen werden am 27.04.2020 veröffentlicht.

### Klassenstufe 3

Paul kann die Noten **g**, **a** und **h** auf der Blockflöte spielen. Die Flötenlehrerin bittet ihn, verschiedene Tonfolgen aus den drei Noten zu spielen. Dabei soll Paul keine Note doppelt spielen.

Notiere alle Tonfolgen, die Paul auf diese Weise spielen kann. Wie viele sind es?

### Klassenstufe 4



Bei einem Würfelspiel müssen drei Bälle in die Dosen geworfen werden. Wer mit zwei oder drei Würfeln die Summe **24** erreicht, hat gewonnen.

- Gib alle Möglichkeiten an, wie man mit nur **zwei** Bällen 24 Punkte erzielen kann.
- Gib alle Möglichkeiten an, 24 Punkte zu erzielen, wenn **alle drei** Bälle treffen.

### Klassenstufe 5

Bei der römischen Zahlschrift werden Buchstaben als Zahlzeichen benutzt.

Es gibt die folgenden Zahlzeichen, deren Wert in Klammern angegeben ist:

$M(1000)$ ,  $D(500)$ ,  $C(100)$ ,  $L(50)$ ,  $X(10)$ ,  $V(5)$  und  $I(1)$ .

Die Werte der Zahlzeichen einer römischen Zahl werden meistens addiert, in besonderen Fällen auch subtrahiert. Wenn eines der Zahlzeichen  $I$ ,  $X$  oder  $C$  vor einem Zahlzeichen mit höherem Wert steht, dann muss der Wert dieses Zahlzeichens subtrahiert werden. Allerdings darf das Zahlzeichen  $I$  nur vor  $V$  oder  $X$  stehen, das Zahlzeichen  $X$  nur vor  $L$  oder  $C$ . Das Zahlzeichen  $V$  darf nicht vor einem Zahlzeichen mit höherem Wert stehen. Weiterhin dürfen nie mehr als drei gleiche Zahlzeichen aufeinanderfolgen.

Beispiele sind:

$IV$  ( $5 - 1 = 4$ );  $IX$  ( $10 - 1 = 9$ );  $XL$  ( $50 - 10 = 40$ );  $CM$  ( $1000 - 100 = 900$ ).

- Schreibe das Jahr 2014 mit römischen Zahlzeichen.
- Schreibe die Zahlen 95 und 99 mit römischen Zahlzeichen.

- c) Welche Zahl verbirgt sich hinter der folgenden Schreibweise: *CMXCIX*?
- d) Ordne die folgenden Zahlen der Größe nach. Beginne mit der kleinsten Zahl: *CIX, LXI, LIX, XCI, XLI, CXI*.  
Gib die Zahlen auch in unserem Zahlensystem an.

## Klassenstufe 6

Es sollen Zahlenfolgen nach folgender Anleitung gebildet werden:

Wähle eine natürliche Zahl als Startzahl.

- (1) Wenn die Zahl gerade ist, teile sie durch 2.  
Wenn die Zahl ungerade ist, multipliziere sie mit 3 und addiere 1.
- (2) Wenn die Zahl 1 erreicht ist, höre auf, anderenfalls gehe zum Schritt (1) zurück.

Ein Beispiel für die Zahlenfolge mit der Startzahl 7 ist:

7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

- a) Bilde für die Startzahlen 6, 9, 15 und 256 die entsprechenden Zahlenfolgen.
- b) Welche Zahlen können in solchen Folgen unmittelbar vor einer 16 stehen?  
Welche Zahlen können unmittelbar vor einer 32 stehen, welche vor einer 64?  
Wie viele Glieder hat eine Folge, deren Startzahl  $2^n$  ist?  
Begründe.
- c) Gibt es eine Startzahl, deren Folge zwar auf der 1 endet, aber nicht über ...8, 4, 2, 1 führt?

*Hinweis:* Wenn du noch Lust und Geduld hast, beginne mit der Anfangszahl 27. Auch hier wirst du mit der 1 enden, allerdings nach vielen Schritten, und du wirst unterwegs unerwartet hohe Zwischenzahlen erreichen. Wie viele Glieder hat diese Folge, und wie lautet ihre größte Zahl?

## Klassenstufe 7

Die Jahrgangsstufe 7 des Wandervogel-Gymnasiums plant einen Ausflug in das Deutsche Museum München. Der Mathematiklehrer Herr Teiler organisiert die Exkursion und kalkuliert die Kosten. Er überlegt: „Wenn jeder Schüler 75 Euro einzahlt, dann fehlen 440 Euro zum Gesamtbetrag. Zahlt dagegen jeder Schüler 80 Euro ein, dann bleiben 440 Euro übrig.“

Wie viele Schüler besuchen am Wandervogel-Gymnasium eine siebte Klasse?

## Klassenstufe 8

Das Sommerheft einer Schülerzeitung gab es für 1,20 Euro zu kaufen. Für das Herbstheft wurde der Preis gesenkt. Es wurden dreimal so viele Herbsthefte verkauft wie Sommerhefte, und trotz des gesenkten Preises haben sich die Einnahmen verdoppelt.

- a) Wie viel kostet das Herbstheft dieser Schülerzeitung?
- b) Ein Schüler behauptet: „Wir können den Preis für die Winterhefte im Vergleich zu den Herbstheften derart verringern, dass wir beim Verkauf von viermal so vielen Winter- wie Sommerheften eine Verdreifachung der Einnahmen im Vergleich zum Sommerheft erzielen.“

Untersuche, ob die Behauptung des Schülers stimmt.

## Klassenstufe 9

Die Seiten zweier unterschiedlich dicker Bücher werden fortlaufend durchnummeriert – jeweils beginnend mit der Seite 1 auf der Vorderseite des ersten Blattes.

- a) Zum Nummerieren der Seiten des ersten Buches benötigt man 6941 Ziffern. Ermitteln Sie die Nummer der letzten Seite.
- b) Wir betrachten im Folgenden die Seitennummern und nicht mehr die Anzahl der verwendeten Ziffern. Aus dem zweiten Buch hat jemand ein Blatt herausgerissen, dadurch fehlen die beiden Nummern auf Vorder- und Rückseite dieses Blattes. Die Summe aller noch verbliebenen Seitennummern im zweiten Buch beträgt 81 707.

Ermitteln Sie die beiden fehlenden Seitennummern.

## Klassenstufe 10

Es sei  $n$  eine natürliche Zahl. Beweisen Sie: Wenn sich die Zahl  $n + 1$  sowohl als Summe zweier aufeinander folgender Quadratzahlen als auch als Summe aus einer Quadratzahl und dem Doppelten der nachfolgenden Quadratzahl schreiben lässt, dann sind die Zahlen  $2n + 1$  und  $3n + 1$  Quadratzahlen.

## Klassenstufen 11–13

Man bestimme für alle Tripel  $(x, y, z)$  positiver ganzer Zahlen, die das Gleichungssystem

$$-10(z - 2xy) + \frac{y - 5}{x} = 52, \quad (1)$$

$$x - y + z = 53, \quad (2)$$

$$x(y + 7) = 54 \quad (3)$$

erfüllen, das Produkt  $xyz$ .