BUNDESWEITE MATHEMATIK-WETTBEWERBE
Bildung & Begabung

MO-Tage

Serie 9 – Lösungen

Klassenstufe 3

Paul kann 6 Tonfolgen spielen.

a h g	g h a	h g a
a g h	g a h	h a g

Klassenstufe 4

Teil a)

$$\begin{aligned} 20 + 4\,, \\ 14 + 10\,, \\ 12 + 12\,. \end{aligned}$$

Teil b)

$$\begin{aligned} 20 + 2 + 2\,, \\ 14 + 8 + 2\,, \\ 14 + 6 + 4\,, \\ 12 + 10 + 2\,, \\ 12 + 8 + 4\,, \\ 12 + 6 + 6\,, \\ 10 + 10 + 4\,, \\ 10 + 8 + 6\,, \\ 8 + 8 + 8\,. \end{aligned}$$

Klassenstufe 5

Teil a) Die Zahl 2014 wird zerlegt in $1000 + 1000 + 10 + (5 - 1)$.

Mit römischen Zahlzeichen geschrieben wird daraus: $MMXIV$.

Teil b) Die Zahl 95 wird zerlegt in $(100 - 10) + 5$.

Mit römischen Zahlzeichen geschrieben wird daraus: XCV.

Die Zahl 99 wird zerlegt in $(100 - 10) + (10 - 1)$.

Mit römischen Zahlzeichen geschrieben wird daraus: $XCIX$.

Teil c) $CMXCIX$ ergibt sich aus $(1000 - 100) + (100 - 10) + (10 - 1) = 900 + 90 + 9 = 999$.

Teil d) In den eckigen Klammern wird die Zahl in unserem Zahlensystem dargestellt:

$$\begin{aligned} &CIX\,[100 + (10 - 1) = 109], && LXI\,[50 + 10 + 1 = 61], \\ &LIX\,[50 + (10 - 1) = 59], && XCI\,[(100 - 10) + 1 = 91], \\ &XLI\,[(50 - 10) + 1 = 41], && CXI\,[100 + 10 + 1 = 111]. \end{aligned}$$

Der Größe nach geordnet ergibt sich die folgende Reihenfolge:

$XLI\,[41] < LIX\,[59] < LXI\,[61] < XCI\,[91] < CIX\,[109] < CXI\,[111]$.

Klassenstufe 6

Teil a) Die Zahlenfolgen sind

6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1.

Teil b) Eine Zahl der Zahlenfolge ergibt sich entweder durch Halbieren einer geraden Zahl oder durch die Multiplikation einer ungeraden Zahl mit 3 und anschließender Addition von 1.

Damit kann vor der 16 die 32 stehen, weil die 32 eine gerade Zahl ist und $32 : 2 = 16$ ist.

Ebenso kann vor der 16 die 5 stehen, weil die 5 ungerade ist und $5 \cdot 3 + 1 = 16$ ist.

Entsprechend ergibt sich für die 64: Vor der 64 können die Zahlen 128 oder $[(64-1):3=]\,21$ stehen.

Vor der 32 kann nur die 64 stehen, weil $(32-1=)\,31$ nicht durch 3 teilbar ist.

Da 2^n gerade ist und bei jedem Durchlauf halbiert wird, hat diese Folge $n+1$ Glieder, und zwar alle Zweierpotenzen bis 2^n.

Teil c) Selbstverständlich sind das die Folgen 4, 2, 1 und 2, 1.

Aber auch die Folge, die mit der 1 beginnt, ist eine solche: 1, 4 (nach Regel (1)), 2, 1.

Lösung zum Hinweis:

27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

Die Folge hat 112 Glieder, und ihre größte Zahl ist 9232.

Diese Folgen haben den Namen Collatz-Folgen nach dem deutschen Mathematiker Lothar Collatz, der 1937 die Frage stellte, ob alle solche Folgen auf 1 enden. Es ist bisher dafür kein Beweis gefunden worden, ebensowenig ist ein Algorithmus dafür bekannt, mit dem man berechnen könnte, wie viele Glieder sie umfassen und wie hoch sie gehen.

Klassenstufe 7

Die Anzahl der Schüler sei x.

Wenn jeder Schüler 75 Euro einzahlt, dann erhält man $75\cdot x$ Euro als eingezahlten Geldbetrag. Die Gesamtkosten betragen nach dem Aufgabentext folglich $(75\cdot x+440)$ Euro, da 440 Euro noch fehlen.

Wenn jeder Schüler 80 Euro einzahlt, dann erhält man $80\cdot x$ Euro als eingezahlten Geldbetrag. Die Gesamtkosten betragen nach dem Aufgabentext folglich $(80\cdot x-440)$ Euro, da es 440 Euro zu viel sind.

Durch Gleichsetzen folgt $75\cdot x+440=80\cdot x-440$ und hieraus $5\cdot x=880$, also $x=176$.

Am Wandervogel-Gymnasium besuchen daher 176 Schüler eine siebte Klasse.

Klassenstufe 8

Teil a) Ein Sommerheft der Schülerzeitung kostete 1,20 €. Die dreifache Anzahl an Heften kostete im Herbst zusammen nur das Doppelte, also kosteten drei Herbsthefte 2,40 €.

Daher kostete ein Herbstheft 0,80 €.

Teil b) Ein Winterheft möge weniger als ein Herbstheft kosten. Dann kosten je vier Winterhefte zusammen weniger als ($4 \cdot 0{,}80\,€ =$) 3,20 € und daher weniger als ($3 \cdot 1{,}20\,€ =$) 3,60 €, was das Dreifache des Preises eines Sommerheftes ist. Folglich können nicht viermal so viele Winter- wie Sommerhefte dreimal so viele Einnahmen im Vergleich zu den Sommerheften ergeben, wenn die Winterhefte weniger als die Herbsthefte kosten.

Die Behauptung des Schülers ist also falsch.

Klassenstufe 9

Teil a) Für die 9 ein-, 90 zwei- und 900 dreistelligen Nummern benötigt man $9+2\cdot 90+3\cdot 900 = 2889$ Ziffern. Die verbleibenden 4052 Ziffern reichen für genau 1013 vierstellige Nummern, also von 1000 bis 2012. Die Nummer der letzten Seite ist daher 2012.

Teil b) Es sei n die Nummer der letzten Seite des zweiten Buches. Für die Summe S aller natürlichen Zahlen von 1 bis n gilt $S = \frac{1}{2}\,n\,(n+1)$.

Da ein Blatt fehlt, gilt $81707 < \frac{1}{2}\,n\,(n+1)$. Die kleinste natürliche Zahl n, die diese Ungleichung erfüllt, ist 404. Das folgt aus

$$\frac{1}{2} \cdot 403 \cdot 404 = 81406 < 81707 < \frac{1}{2} \cdot 404 \cdot 405 = 81810\,.$$

Die Differenz $81810-81707 = 103$ entsteht dann durch die fehlenden Seitenzahlen 51 und 52.

Nun muss noch untersucht werden, ob eine größere Seitenanzahl (bei Herausreißen eines Blattes mit größeren Seitennummern) auch auf die Summe 81707 führen kann.

Für $n = 405$ gilt $S = 82215$, die Differenz ist dann $S - 81707 = 508$. Die Summe zweier aufeinander folgender Zahlen ist jedoch ungerade. Dieser Fall scheidet daher aus.

Für $n \geq 406$ ist die Summe der verbleibenden Seitennummern selbst nach Ausreißen des letzten Blattes mindestens $1 + 2 + \cdots + 403 + 404 = 81\,810$ und damit echt größer als 81 707. Auch dieser Fall führt zu einem Widerspruch.

Damit wurde gezeigt, dass es sich bei den beiden fehlenden Seitennummern um 51 und 52 handelt.

Klassenstufe 10

Es gelte $n+1 = k^2 + (k+1)^2$ und $n+1 = r^2 + 2\,(r+1)^2$ mit gewissen natürlichen Zahlen n, k und r. Dann folgt

$$2\,n + 1 = 2\,(n+1) - 1 = 2\,(k^2 + (k+1)^2) - 1 = 4\,k^2 + 4\,k + 1 = (2\,k+1)^2$$

und

$$3\,n + 1 = 3\,(n+1) - 2 = 3\,(r^2 + 2\,(r+1)^2) - 2 = 9\,r^2 + 12\,r + 4 = (3\,r+2)^2\,.$$

Also sind $2\,n+1$ und $3\,n+1$ tatsächlich Quadratzahlen.

Anmerkung: Solche Zahlen gibt es in der Tat: Für $n = 40$ ist $n + 1 = 41$ und es gilt sowohl $41 = 4^2 + 5^2$ als auch $41 = 3^2 + 2 \cdot 4^2$. Dann sind sowohl $2\,n+1 = 81$ als auch $3\,n+1 = 121$ Quadratzahlen. Ein solches Beispiel muss für eine vollständige Lösung nicht angegeben werden.

Klassenstufen 11–13

Angenommen, es gibt ein Tripel $(x,\, y,\, z)$ positiver ganzer Zahlen, das das Gleichungssystem erfüllt. Aus (3) folgt, dass x ein Teiler von 54 sein muss, also ist $x \in \{1,\, 2,\, 3,\, 6,\, 9,\, 18,\, 27,\, 54\}$.

Wegen $y \geq 1$ ist $x = \frac{54}{y+7} \leq \frac{54}{8} = 6{,}75$, sodass nur $x \in \{1,\, 2,\, 3,\, 6\}$ möglich ist. Die Möglichkeiten werden systematisch durchprobiert. Die Werte für y und z werden aus den Gleichungen (3) bzw. (2) ermittelt. Anschließend wird geprüft, ob auch (1) erfüllt ist.

x	y	z	(1) erfüllt?	Produkt xyz
1	47	99	nein	
2	20	71	nein	
3	11	61	ja	2013
6	2	49	nein	

Die Probe zeigt: Es existiert genau ein Tripel positiver ganzer Zahlen, das das Gleichungssystem erfüllt, nämlich (3, 11, 61). Das gesuchte Produkt hat den Wert 2013.