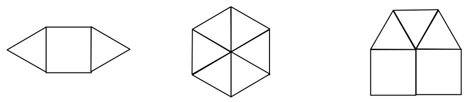
Internationale Mathematik-Olympiade

Auswahlwettbewerb zur IMO 2000

1. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Gegeben sei ein hinreichend großer Vorrat von gleichseitigen Dreiecken und Quadraten, alle mit der gleichen Seitenlänge. Aus diesen Bausteinen lassen sich konvexe* Polygone bilden, indem man sie in der Ebene lückenlos und überschneidungsfrei aneinander legt. (Die Figur zeigt drei Möglichkeiten für ein Sechseck.)



a) Welches ist die größtmögliche Anzahl m von Seitenkanten für ein so gebildetes konvexes Polygon? (Die Antwort ist zu begründen.)

b) Man gebe für alle möglichen Anzahlen von Seitenkanten $\leq m$ jeweils ein Beispiel an.

*) Eine Figur heißt konvex, wenn für je zwei ihrer Punkte auch alle Punkte der Verbindungsstrecke zu der Figur gehören.

Aufgabe 2

Wir betrachten – mit 1 beginnend – alle positiven Teiler einer natürlichen Zahl n der Größe nach geordnet: $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < n$.
Man bestimme alle natürlichen Zahlen n mit den Eigenschaften:
(1) $n = d_{13} + d_{14} + d_{15}$ und
(2) $(d_5 + 1)^3 = d_{15} + 1$

Aufgabe 3

Die natürlichen Zahlen von 1 bis n^2 werden zufällig auf die Felder eines $n \times n$-Quadrats verteilt ($n \geq 2$). Für jedes Paar von Zahlen innerhalb einer Reihe bzw. einer Spalte dividieren wir die größere durch die kleinere Zahl. Der kleinste dieser $n^2(n-1)$ Quotienten werde als *Charakteristik C* der zufälligen Anordnung bezeichnet.
Welches ist der größtmögliche Wert für C? (Die Antwort ist zu begründen.)

2. Auswahlklausur

Aufgabe 1

In einem 10×17-Rechteck werden 74 Punkte markiert.
Man beweise, dass es dabei stets zwei markierte Punkte gibt, deren Abstand 2 nicht überschreitet.

Aufgabe 2

Zwei Sehnen AC und BD eines Kreises mit Mittelpunkt M schneiden sich in P. Die Umkreise der Dreiecke PBC und PDA haben ihre Mittelpunkte in E bzw. F und schneiden sich ein zweites Mal in Q.
Man beweise, dass $\overline{MF} = \overline{QE}$ gilt.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Summe $S = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+m}$ mit $n, m \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

a) Man beweise, dass S keine natürliche Zahl sein kann.

b) Man ermittle (mit Begründung!) für $m = 2 \cdot (n-1)$ ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass $S \in \left]k, k+1\right[$.