Internationale Mathematik-Olympiade

Auswahlwettbewerb zur IMO 2001

1. Auswahlklausur

Aufgabe 1

In einem Schritt kann man vom Punkt $A(i \mid j \mid k)$, mit $i, j\ k \in \{0, 1, 2, 3\}$, zu einem weiteren Punkt des Würfelgitters gelangen, indem man stets genau eine der Koordinaten um 1 vergrößert.
Man ermittle die Anzahl aller kürzesten Wege, die vom Ursprung $O(0 \mid 0 \mid 0)$ in den Punkt $P(3 \mid 3 \mid 3)$ führen.

Aufgabe 2

Man beweise: Für die positiven reellen Zahlen a, b, c gilt die Ungleichung

$$\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \le \frac{3}{2}\ .$$

Aufgabe 3

Im regulären 18–Eck $A_1A_2 \ldots A_{18}$ mit den Umkreismittelpunkt M ist P der Schnitt von A_1A_7 mit MA_2 und Q der Schnitt von A_2A_{13} mit MA_1.
Man berechne den Winkel $\angle MPQ$.

2. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Gegeben seien positive ganze Zahlen a, b, c mit der Eigenschaft $b > 2a$ und $c > 2b$.
Man zeige, dass es dann stets eine reelle Zahl *r* mit folgender Eigenschaft gibt:
Die gebrochenen Teile der Zahlen ra, rb, rc liegen alle im Intervall $\left]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$.

(Hinweis: Der gebrochene Teil einer Zahl ist die Differenz zwischen der Zahl und ihrem ganzen Teil.)

Aufgabe 2

Wir betrachten zwei Kreise in der Ebene, welche sich in den beiden verschiedenen Punkten *X* und *Y* schneiden.
Man beweise, dass es in dieser Ebene vier feste Punkte mit folgender Eigenschaft gibt: Für jeden Kreis, der im Durchschnitt der beiden gegebenen Kreise liegt und diese in den Punkten *A* und *B* berührt sowie die Gerade *XY* in den Punkten C und *D* schneidet, geht jede der Geraden *AC*, *AD*, *BC* und *BD* durch einen dieser vier Punkte.

Aufgabe 3

Für jede positive ganze Zahl *n* bezeichne $d(n)$ die Anzahl aller positiver Teiler von *n*.
(Beispiele: $d(2) = 2, d(6) = 4, d(9) = 3$.)

Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen *n* mit der Eigenschaft $(d(n))^3 = 4n$.