Internationale Mathematik-Olympiade

Auswahlwettbewerb zur IMO 2008

1. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Man zeige, dass es in der Dezimaldarstellung von $\sqrt[3]{3}$ zwischen der 1000000. und 3141592. Nachkommastelle eine von 2 verschiedene Ziffer gibt.

Aufgabe 2

Es sei *ABCD* ein gleichschenkliges Trapez mit $AB \| CD$ und $\overline{BC} = \overline{AD}$. Die Parallele zu *AD* durch *B* treffe die Senkrechte zu *AD* durch *D* im Punkt *X*. Ferner treffe die durch *A* gezogene Parallele zu *BD* die Senkrechte zu *BD* durch *D* im Punkt *Y*.

Man beweise, dass die Punkte *C*, *X*, *D* und *Y* auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Aufgabe 3

Man zeige, dass es eine ganze Zahl *a* gibt, für die $a^3 - 36a^2 + 51a - 97$ ein Vielfaches von 3^{2008} ist.

2. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen *k* und *n* mit folgender Eigenschaft:

Die Zahl $k^4 + n^2$ ist ohne Rest durch die Zahl $7^k - 3^n$ teilbar.

Aufgabe 2

Gegeben ist ein (allgemeines) Trapez *ABCD*, dessen Diagonalen sich im Punkt *P* schneiden. Ein Punkt *Q* liegt so zwischen den Parallelen *AB* und *DC*, dass $\sphericalangle AQB = \sphericalangle CQD$ gilt und die Gerade *BC* zwischen *P* und *Q* verläuft.

Man beweise, dass $\sphericalangle DQP = \sphericalangle BAQ$ gilt.

Aufgabe 3

Ein Quadrat wird so in *n* > 1 Rechtecke zerlegt, dass die Seiten der Rechtecke parallel zu den Seiten des gegebenen Quadrats verlaufen. Jede Gerade, die parallel zu einer der Seiten des Quadrats verläuft und das Innere des Quadrats schneidet, soll dabei auch im Inneren wenigstens eines der Rechtecke verlaufen.

Man beweise, dass es dann in dieser Zerlegung stets ein Rechteck gibt, das keinen Punkt mit dem Rand des Quadrats gemeinsam hat.