Internationale Mathematik-Olympiade

Auswahlwettbewerb zur IMO 2005

Lösungen zur 2. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Eine unendliche Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ reeller Zahlen erfüllt die Bedingung $a_n = |a_{n+1} - a_{n+2}|$ für alle $n \geq 0$, wobei a_0 und a_1 verschiedene positive Zahlen sind.
Kann diese Folge beschränkt sein? Die Antwort ist zu begründen.

Lösung

Zunächst beweisen wir, dass zwei aufeinander folgende Glieder niemals gleich sein können. Aus $a_n = a_{n+1} = c$ folgte nämlich sofort $a_{n-1} = 0$ und $a_{n-2} = a_{n-3} = c$ $(n > 2)$. Schließlich müsste $a_0 = a_1$ oder $a_0 = 0$ bzw. $a_1 = 0$ sein, was ausgeschlossen ist. Daher gilt auch $a_n > 0$ für alle *n*.
Auflösen der Bedingung liefert $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ falls $a_{n+2} > a_{n+1}$ ist, sowie $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ falls $a_{n+2} < a_{n+1}$ ist. Aus $a_{n+1} < a_n$ folgt also $a_{n+2} > a_n$ und $a_{n+2} > a_{n+1}$. Daher ist diejenige Teilfolge $b_0, b_1, b_2, \ldots$ streng monoton wachsend, die durch Weglassen aller Glieder entsteht, die kleiner als ihr Vorgänger und ihr Nachfolger sind.
Wenn wir nun zeigen, dass $b_{m+1} - b_m \geq b_m - b_{m-1}$ für alle $m \geq 2$ gilt, so haben wir für diese Teilfolge eine arithmetische Folge mit positiver Differenz als Minorante, woraus die Unbeschränktheit direkt folgt. Dazu setzen wir $b_{m+1} = a_{n+2}$, wobei $a_{n+2} > a_{n+1}$ gelten soll.
Für $a_{n+1} > a_n$ haben wir $b_m = a_{n+1}$ und $b_{m-1} \geq a_{n-1}$ (weil entweder $b_{m-1} = a_{n-1}$ oder $b_{m-1} = a_n > a_{n-1}$ gilt). So ist $b_{m+1} - b_m = a_n = a_{n+1} - a_{n-1} \geq b_m - b_{m-1}$. Für $a_{n+1} < a_n$ haben wir dagegen $b_m = a_n$ und $b_{m-1} \geq a_{n-1}$ (weil entweder $b_{m-1} = a_{n-1}$ oder $b_{m-1} = a_{n-2} > a_{n-1}$ gilt). So ist hier $b_{m+1} - b_m = a_{n+1} = a_n - a_{n-1} \geq b_m - b_{m-1}$.

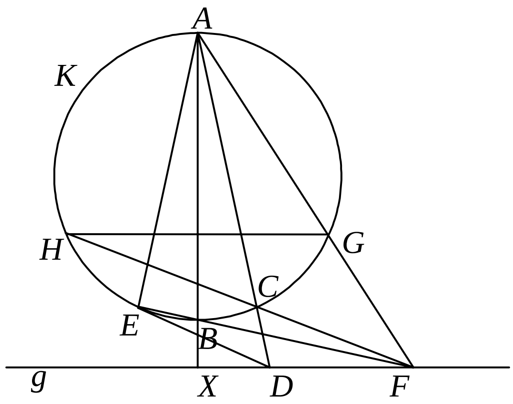
Aufgabe 2

Gegeben seien ein Kreis *K* und eine Gerade *g*, die keinen gemeinsamen Punkt haben. Ferner sei $\overline{AB}$ der Durchmesser von *K*, der orthogonal zu *g* ist, wobei *B* näher an *g* liegt als *A*. Weiter sei ein beliebiger Punkt *C*, verschieden von *A* und *B*, auf *K* gegeben. Die Gerade *AC* schneidet *g* in *D*; die Gerade *DE* berührt *K* in *E*, wobei *B* und *E* auf derselben Seite von *AC* liegen. Schließlich schneidet *BE* die Gerade *g* im Punkt *F* und *AF* den Kreis *K* außer in *A* im Punkt *G*.
Man beweise, dass der Spiegelpunkt von *G* bezüglich der Achse *AB* auf der Geraden *CF* liegt.

Lösung

Wir bezeichnen den zweiten Schnittpunkt von *CF* und *K* mit *H* sowie den Schnittpunkt von *AB* und *g* mit *X*. Wegen $AB \perp g$ reicht es zu zeigen, dass $GH \parallel g$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\angle AGH = \angle AFD$. Umfangswinkelsatz und Scheitelwinkel liefern $\angle AGH = \angle ACH = \angle DCF$; also muss $\angle DCF = \angle AFD$ gezeigt werden. Da die Dreiecke *DFC* und *ADF* bei *D* einen Winkel gemeinsam haben, braucht nur deren (gegensinnige) Ähnlichkeit nachgewiesen zu werden. Diese ist genau dann erfüllt, wenn $\frac{|DC|}{|DF|} = \frac{|DF|}{|DA|}$,

d.h. $|DF|^2 = |DA| \cdot |DC|$ gilt. Nach dem Tangenten-Sekantensatz gilt allerdings $|DE|^2 = |DA| \cdot |DC|$, so dass nur $|DE| = |DF|$ zu zeigen bleibt, was mit $\angle DEF = \angle EFD$ gleichbedeutend ist.
Wegen $\angle FXB = \angle AEB = 90°$ ist *AEXF* ein Sehnenviereck und es gilt $\angle EFX = \angle EAB$. Die Gleichheit der Sehnen-Tangentenwinkel liefert $\angle DEF = \angle EAB$, woraus $\angle DEF = \angle EFD$ folgt.



Aufgabe 3

Gegeben seien zwei positive ganze Zahlen *n* und *k*. In der Ebene liegen *n* Kreise ($n \geq 2$), so dass jeder Kreis jeden anderen zweimal schneidet und alle diese Schnittpunkte paarweise verschieden sind.
Jeder Schnittpunkt wird mit einer von *n* Farben so gefärbt, dass jede Farbe wenigstens einmal verwendet wird und auf jedem der Kreise die gleiche Anzahl *k* von Farben vertreten ist.
Man bestimme alle Werte von *n* und *k*, für die eine solche Färbung möglich ist.

Lösung

Die Antwort lautet: $2 \leq k \leq n \leq 3$ oder $3 \leq k \leq n$.
Offensichtlich gilt $k \leq n$ nach Aufgabenstellung sowie $k \geq 2$, weil für $k = 1$ alle Punkte dieselbe Farbe hätten, während die Anzahl *n* der Farben ≥ 2 sein soll. Wir nummerieren die Kreise und die Farben von 1 bis *n* und bezeichnen mit $F(i, j)$ die Menge der Farben der Schnittpunkte der Kreise *i* und *j*. $F(i, j)$ enthält ein oder zwei Elemente.
Sei $k = 2$. Für $n = 2$ ist $F(1,2) = \{1,2\}$ eine erlaubte Färbung. Für $n = 3$ ist $F(1,2) = \{3\}$, $F(2,3) = \{1\}$, $F(3,1) = \{2\}$ ein Beispiel für eine erlaubte Färbung. Sei nun $n \geq 4$. Jedem der *n* Kreise ordnen wir die Menge $\{i, j\}$ der beiden auf ihm vorkommenden Farben zu. Jede dieser Mengen besteht aus zwei Elementen und jede der *n* Farben muss in wenigstens zwei Mengen vorkommen, da sich in jedem gefärbten Punkt zwei Kreise schneiden. Also kommt jede Farbe in genau zwei Mengen vor. Zum Kreis 1 mit der Menge $\{i, j\}$ gibt es daher noch höchstens zwei weitere Kreise, in deren Farbmengen *i* oder *j* vorkommen. Wegen $n \geq 4$ finden wir stets einen Kreis 2 mit der Menge $\{k, l\}$ und $\{k, l\} \cap \{i, j\} = \{\}$. Die Schnittpunkte der Kreise 1 und 2 sind dann nicht erlaubt färbbar – Widerspruch!
Nun beweisen wir mit vollständiger Induktion einen etwas stärkeren Satz als verlangt: Für $n \geq k \geq 3$ existiert stets eine erlaubte Färbung, bei der auf dem Kreis *i* die Farbe *i* für alle $i = 1,...,n$ vorkommt. Zur Verankerung geben wir für $k = n = 3$ mit $F(1,2) = \{1,2\}$, $F(1,3) = \{1,3\}$, $F(2,3) = \{2,3\}$ ein Beispiel und für $k = 3$, $n > 3$ folgendes Beispiel für eine erlaubte Färbung mit Zusatzbedingung:
$F(1,2) = \{1,2\}$, $F(i, i+1) = \{i\}$ für $1 < i < n-1$, $F(n-1, n) = \{n-2, n-1\}$ und $F(i, j) = \{n\}$ für die restlichen Paare (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$.
Nun nehmen wir an, dass der stärkere Satz für ein $k \geq 3$ erfüllt ist, und wählen $n \geq k+1$. Wegen $n-1 \geq k \geq 3$ gibt es eine erlaubte Färbung mit Zusatzbedingung für die Kreise bzw. Farben $1,2,...,n-1$. Jetzt färben wir die Schnittpunkte des Kreises *n*: Für jedes $i = 1,...,n-1$ erhält ein Schnittpunkt der Kreise *i* und *n* die Farbe *n*. Damit kommen auf jedem der Kreise *i* mit $i = 1,...,n-1$ genau $k+1$ Farben vor; darunter *i* und *n*. Für $i = 1,...,k$ erhält der zweite Schnittpunkt der Kreise *i* und *n* die Farbe *i*, so dass nun auch auf dem Kreis *n* genau $k+1$ Farben liegen, nämlich 1 bis *k* und *n*. Alle übrigen neuen Schnittpunkte erhalten die Farbe *n*, so dass auf keinem Kreis weitere Farben dazukommen. Diese Färbung erfüllt alle Bedingungen.