Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik–Olympiade

Lösungen zur 2. IMO-Auswahlklausur 2006

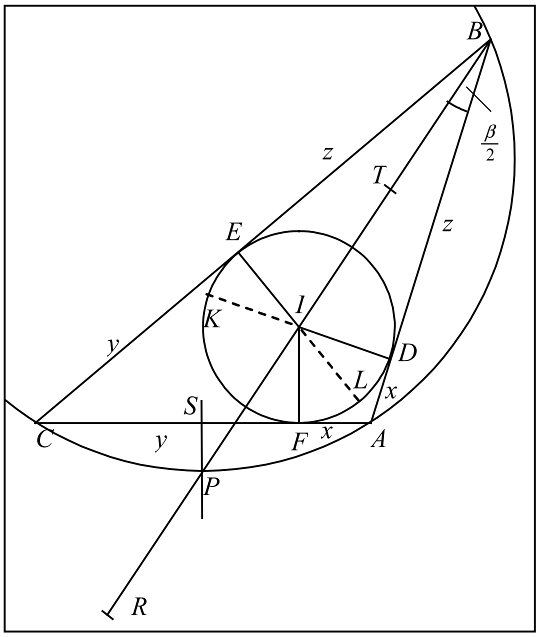
Aufgabe 1
Man bestimme mit Beweis alle Funktionen $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft
(I) $\qquad f(x)f(y) = 2f(x + yf(x))$
für alle positiven reellen Zahlen x, y.

Lösung: Offensichtlich erfüllt die Funktion $f(x) = 2$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ die gegebene Funktionalgleichung. Wir werden zeigen, dass dies die einzige Lösung ist.
Lemma 1: Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt $f(x) \geq 1$.
Zum Beweis nehmen wir $f(x) < 1$ für ein geeignetes x an und setzen $y = \frac{x}{1-f(x)}$. Dann ist $x > 0$ und es folgt $y = x + yf(x)$. Aus (I) erhalten wir $f(x)f(x + yf(x)) = 2f(x + yf(x))$ und wegen $f(x + yf(x)) > 0$ folgt $f(x) = 2$, Widerspruch!
Lemma 2: Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt $f(x) \geq 2$.
Zum Beweis setzen wir in (I) $x = y$ und erhalten (II): $f^2(x) = 2f(x + xf(x))$. Sei $f(x_1) < 2$ für ein geeignetes x_1. Dann ist $f(x_1 + x_1 f(x_1)) = \frac{f^2(x_1)}{2} < f(x_1)$. Mit $x_{k+1} = x_k + x_k f(x_k)$ für $k = 1,2,...$ entsteht eine monoton fallende Folge ($f(x_1) = a; \frac{a^2}{2}; \frac{a^4}{2^3};...; \frac{a^{2t}}{2^{2t-1}},...$) von Funktionswerten. Für $t > \frac{1}{2-2\log_2 a}$ sind die Werte dieser Folge kleiner als 1, Widerspruch!
Lemma 3: *f* ist monoton steigend.
Zum Beweis nehmen wir an, es gibt $s, \varepsilon > 0$ mit $f(s) > f(s+\varepsilon)$. Einsetzen von $x = s$ und $y = \frac{\varepsilon}{f(s)}$ in (I) liefert $f(s)f(\frac{\varepsilon}{f(s)}) = 2f(s+\varepsilon)$, woraus $f(\frac{\varepsilon}{f(s)}) < 2$ folgt, Widerspruch!
Lemma 4: Wenn es ein $z \in \mathbb{R}^+$ gibt mit $f(z) > 2$, dann gilt $f(x) > 2$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$.
Wieder setzen wir $x = z$ und $y = \frac{\varepsilon}{f(z)}$ in (I) ein und haben $f(z)f(\frac{\varepsilon}{f(z)}) = 2f(z+\varepsilon)$, woraus jetzt mit Lemma 2 folgt: $f(z) \leq f(z+\varepsilon)$ für alle $\varepsilon > 0$. Also existiert ein $z_0 \geq 0$ mit $f(z) > 2$ für alle $z > z_0$. Nehmen wir an, dass $z_0 > 0$ gilt. Dann folgt mit $x = y = z_0 - \varepsilon > 0$ aus (I) $f(x)f(y) = 4$, und wegen $x + yf(x) = (z_0 - \varepsilon)(1 + f(z_0 - \varepsilon)) = 3(z_0 - \varepsilon)$ gilt für hinreichend kleines ε, dass $3(z_0 - \varepsilon) > z_0$ und daher $2f(x + yf(x)) > 4$, Widerspruch!
Lemma 5: Wenn $f(x) > 2$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$, dann ist *f* injektiv.
Angenommen, es gäbe $s, \varepsilon > 0$ mit $f(s) = f(s+\varepsilon)$. Wir setzen $x = s$ und $y = \frac{\varepsilon}{f(s)}$ in (I) ein und haben $f(s)f(\frac{\varepsilon}{f(s)}) = 2f(s+\varepsilon)$, woraus nun $f(s) < f(s+\varepsilon)$ folgt, Widerspruch!
Hauptbeweis: Wegen der Symmetrie der linken Seite von (I) gilt auch $x + yf(x) = y + xf(y)$. Für $y = 1$ folgt $f(x) = (f(1)-1)x + 1 = mx + 1$. Durch Einsetzen wird jedoch leicht gezeigt, dass keine lineare Funktion Lösung von (I) sein kann.

Anmerkung: Wegen $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$ darf nicht mit $f(0)$ operiert werden. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ bedeutet nicht, dass jede positive reelle Zahl Funktionswert sein muss. Zusätzliche Annahmen über *f* wie z.B. Stetigkeit sind nicht zulässig.

Aufgabe 2
Gegeben sei ein Dreieck *ABC* mit $\overline{AB} + \overline{BC} = 3\overline{AC}$. Sein Inkreis habe den Mittelpunkt *I* und berühre die Seiten *AB* in *D* bzw. *BC* in *E*. Weiter seien *K* und *L* die Spiegelpunkte von *D* bzw. *E* bezüglich *I*.
Man beweise, dass das Viereck *ACKL* ein Sehnenviereck ist.

Lösung: Zu den in der Aufgabenstellung genannten Punkten bezeichnen wir den Berührpunkt des Inkreises mit AC mit F, den Mittelpunkt von AC mit S, den Schnittpunkt von w_β und der Mittelsenkrechten m_{AC} mit P, den Spiegelpunkt von B an I mit R, den Mittelpunkt von BI mit T und die paarweise gleichen Abschnitte auf den Dreiecksseiten mit x, y bzw. z (siehe Figur).



Aus $\overline{AB}+\overline{BC}=3\overline{AC}$ folgt $x+z+z+y=3(x+y)$, also (I) $z=x+y$. Bekanntlich liegt P auf dem Umkreis von ABC. Daher gilt $\angle CAP=\angle CBP=\angle PBA=\angle PCA=\frac{\beta}{2}$ und $\overline{AP}=\overline{CP}$. Die Dreiecke ASP und BEI sind ähnlich, und wegen $\overline{AS}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{x+y}{2}=\frac{z}{2}=\frac{1}{2}\overline{BE}$ gilt mit der Bezeichnung r für den Inkreisradius (II) $\overline{SP}=\frac{1}{2}\overline{EI}=\frac{r}{2}$ sowie $\overline{AP}=\frac{1}{2}\overline{BI}$.

Für den Flächeninhalt F des Dreiecks ABC gilt $F=rs=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, wobei $s=\frac{a+b+c}{2}=x+y+z$ ist. Daher ist $r(x+y+z)=\sqrt{(x+y+z)xyz}$ und mit (I) folgt $2rz=\sqrt{2zxyz}\Leftrightarrow 4r^2=2xy\Leftrightarrow 8r^2=4xy\Leftrightarrow 9r^2+(x-y)^2=r^2+(x+y)^2=r^2+z^2$. Wegen $\angle BDI=90°$ ist (III) $\overline{BI}^2=r^2+z^2$. Wegen $PS\perp AC\perp FI$ gilt $\overline{PI}^2=\overline{SF}^2+(\overline{PS}+\overline{FI})^2$. Aber $\overline{SF}=\frac{1}{2}\overline{AC}-x=\frac{x+y}{2}-x=\frac{y-x}{2}$ und $\overline{FI}=r$. Daher und mit (II) ist $\overline{PI}^2=(\frac{y-x}{2})^2+(\frac{3}{2}r)^2$ $=\frac{(y-x)^2+9r^2}{4}$. Mit (III) folgt $\overline{PI}^2=\frac{1}{4}\overline{BI}^2$, also $\overline{PI}=\frac{1}{2}\overline{BI}$. So gilt (IV) $\overline{PI}=\overline{PA}=\overline{PC}=\overline{PR}$.

Außerdem wird T bei Spiegelung an I auf P abgebildet. Daher ist auch $\overline{IT}=\overline{PI}$. $\overline{BI}$ ist der Durchmesser des Kreises durch B, I, D und E (rechte Winkel bei D und E). Dieser Kreis hat T als Mittelpunkt. Bei Spiegelung dieses Kreises an I wird I auf I, T auf P, D auf K, E auf L abgebildet und der Radius bleibt erhalten. Mit (IV) folgt, dass A, L, I, K, C und R auf einem Kreis um P liegen; also ist $ACKL$ ein Sehnenviereck.

Anmerkung: Öfters wurden Lagebeziehungen oder Kongruenzen unbewiesen verwendet.

Aufgabe 3

Wir betrachten ein $m\times n$-Rechteck aus mn Einheitsquadraten. Zwei seiner Einheitsquadrate heißen *benachbart*, wenn sie eine gemeinsame Seitenkante haben, und ein *Pfad* ist eine Folge von Einheitsquadraten, in der je zwei aufeinander folgende Elemente benachbart sind.
Jedes Einheitsquadrat des Rechtecks kann entweder weiß oder schwarz gefärbt werden. Sind alle Quadrate gefärbt, so liegt eine *Färbung* des Rechtecks vor.
Es sei N die Anzahl aller solcher Färbungen, bei denen es wenigstens einen schwarzen Pfad von der linken zur rechten Seitenkante des Rechtecks gibt. Ferner sei M die Anzahl aller Färbungen, bei denen es wenigstens zwei schwarze Pfade von der linken zur rechten Seitenkante des Rechtecks gibt, die kein gemeinsames Quadrat enthalten.
Man beweise, dass $N^2\ge M\cdot 2^{mn}$.

Lösung: Wir werden die Behauptung verallgemeinern. Dazu lassen wir zu, dass das $m\times n$-Rechteck auf beiden Seiten gefärbt wird und dass einige der Einheitsquadrate transparent sind. Solche Felder brauchen nur auf einer Seite gefärbt zu werden und sehen dann auf beiden Seiten gleich aus. Ein nicht transparentes Einheitsquadrat muss dagegen auf beiden Seiten gefärbt werden, allerdings nicht notwendigerweise mit der gleichen Farbe.

Nun sei A die Anzahl aller solcher Färbungen der Oberseite, bei denen es wenigstens einen schwarzen Pfad von der linken zur rechten Seitenkante des Rechtecks gibt. Entsprechend sei B für die Unterseite definiert. Ferner sei C die Anzahl aller Färbungen, bei denen es zwei schwarze Pfade von der linken zur rechten Seitenkante des Rechtecks gibt, und zwar einen auf der Ober- und einen auf der Unterseite, die kein gemeinsames transparentes Quadrat enthalten. Schließlich sei D die Anzahl aller Färbungen dieses Rechtecks. Wir werden
(I) $A \cdot B \geq C \cdot D$ beweisen und haben damit die ursprüngliche Behauptung als Spezialfall gezeigt, in dem alle Felder transparent sind. Hier gilt nämlich $A = B = N$, $C = M$, $D = 2^{mn}$.
Den Beweis von (I) führen wir mit vollständiger Induktion nach der Anzahl k der transparenten Felder. Für $k = 0$ ist $A = B = N \cdot 2^{mn}$, $C = N^2$ und $D = (2^{mn})^2$, so dass in (I) Gleichheit gilt. Nun nehmen wir an, dass die Behauptung für k erfüllt ist, und betrachten ein Rechteck mit $k+1$ transparenten Feldern. Die Anzahlen A, B, C, D gelten nun für dieses Rechteck. Wir wählen ein transparentes Einheitsquadrat t und machen es undurchsichtig. Für das so entstandene Rechteck seien die jeweiligen Anzahlen mit A', B', C', D' bezeichnet und nach Induktionsannahme gilt $A' \cdot B' \geq C' \cdot D'$.
Nun ist offensichtlich $D' = 2 \cdot D$. Für jede in A gezählte Färbung existieren genau zwei Färbungen von A', nämlich dadurch unterschieden, dass t von unten schwarz oder weiß gefärbt wird. Umgekehrt kann man zwei in A' gezählten Färbungen, die sich nur in der Farbe der Unterseite eines Quadrats unterscheiden, eine in A gezählte Färbung zuordnen. Also ist $A' = 2 \cdot A$ und entsprechend $B' = 2 \cdot B$. Zum Beweis von (I) für $k+1$ genügt also der Nachweis von $C' \geq 2 \cdot C$.
Dazu sei t wieder transparent. Weil in C nur solche Färbungen gezählt werden, die wenigstens einen schwarzen Pfad oben und unten enthalten, wobei diese sich nicht in einem transparenten Quadrat schneiden, kann t höchstens auf einem dieser Pfade, oBdA auf dem oberen, liegen. Machen wir also t undurchsichtig und behalten seine Farbe oben bei, können wir seine Unterseite schwarz oder weiß färben, so dass beide Färbungen in C' gezählt werden. Dabei liefern verschiedene in C gezählte Färbungen stets verschiedene Paare von Färbungen, die in C' gezählt werden. Damit ist alles gezeigt.

Anmerkung: Ein Beweis mit vollständiger Induktion auf einer Brettseite ist heikel, da beim Abschätzen der Fortsetzungen der Pfade häufig Zählfehler auftreten. In der Regel wurden mögliche Fälle übersehen. Die Anzahl schwarzer Felder in einem schwarzen Pfad kann größer sein als die Breite des Rechtecks.