Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik–Olympiade

Lösungen zur 2. IMO-Auswahlklausur 2009

Aufgabe 1
Es sei p eine Primzahl. Weiter seien a, b, c ganze Zahlen, welche die Gleichungen $a^2 + pb = b^2 + pc = c^2 + pa$ erfüllen.
Man beweise, dass dann $a = b = c$ gilt.

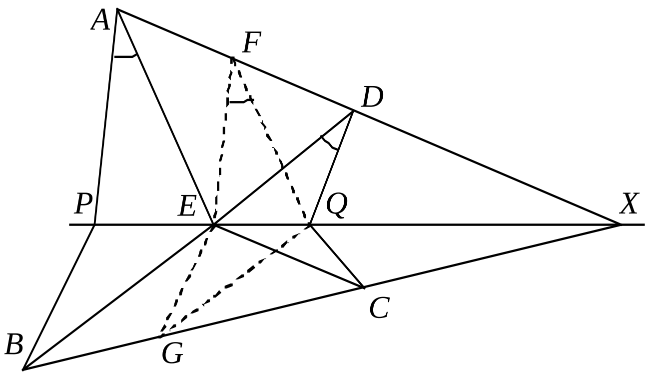
Lösung: Wenn zwei der drei Zahlen a, b, c gleich sind, können wir wegen der zyklischen Vertauschbarkeit oBdA $a = b$ annehmen. Damit wird die linke gegebene Gleichung zu $a^2 + pb = a^2 + pc$, woraus wegen $p \neq 0$ direkt $b = c$ folgt, so dass die Behauptung erfüllt ist.
Im Folgenden können wir daher $a \neq b \neq c \neq a$ voraussetzen. Umformen der Gleichungen liefert $p = \frac{b^2 - a^2}{b - c} = \frac{c^2 - b^2}{c - a} = \frac{a^2 - c^2}{a - b}$. Multiplizieren der drei Terme und Kürzen ergibt $p^3 = -(a+b)(b+c)(c+a)$ (1).
Von den drei gegebenen Zahlen sind nach dem Schubfachprinzip wenigstens zwei gerade oder wenigstens zwei ungerade; deren Summe ist also durch 2 teilbar. Deshalb ist das Produkt auf der rechten Seite von (1) gerade. Es folgt $p = 2$ und daher $(a+b)(b+c)(c+a) = -8$. (2)
Sind zwei der Klammern in (2) gleich, so sei oBdA $a + b = b + c$. Es folgt direkt $a = c$ und daher die Gleichheit aller drei gegeben Zahlen.
Ist genau eine der Klammern ungerade (gleich ±1), so ist $(a+b)+(b+c)+(c+a)$ einerseits ungerade, andererseits gleich $2(a+b+c)$, also gerade – Widerspruch!
Es bleiben daher (bis auf zyklische Vertauschbarkeit) die Fälle $(\pm 1; \mp 1; 8)$ zu untersuchen.
Aus $a+b=1$, $b+c=-1$, $c+a=8$ folgt $a=5$, $b=-4$, $c=3$, was mit $25-8 \neq 16+6$ einen Widerspruch zur ersten gegebenen Gleichung liefert.
Aus $a+b=-1$, $b+c=1$, $c+a=8$ folgt $a=3$, $b=-4$, $c=5$, was mit $9-8 \neq 16+10$ einen Widerspruch zur ersten gegebenen Gleichung liefert.
Daher ist nur $a = b = c$ möglich. In der Tat gilt $a^2 + pa = a^2 + pa$.

Hinweise: Aus $a > b$ folgt nicht $a^2 > b^2$ und umgekehrt, denn a oder b können negativ sein.
Die gegebenen Gleichungen sind nicht **symmetrisch** in a, b und c, sondern nur **zyklisch**. Daher darf nicht oBdA $a > b > c$ verwendet werden.
Die Behauptung lässt sich auf alle positiven natürlichen Exponenten n verallgemeinern.

Aufgabe 2
Ausgehend von einem konvexen Viereck $ABCD$ ohne ein Paar paralleler Seiten seien P und Q Punkte innerhalb $ABCD$, so dass $PQDA$ und $QPBC$ beides Sehnenvierecke sind. Wir nehmen außerdem an, dass es einen Punkt E auf der Strecke PQ mit der Eigenschaft gibt, dass $\sphericalangle PAE = \sphericalangle EDQ$ und $\sphericalangle EBP = \sphericalangle QCE$ ist.
Man beweise, dass dann $ABCD$ ebenfalls ein Sehnenviereck ist.

Lösung: Es sei F der Schnittpunkt der Parallelen zu AP durch E mit AD. Dann ist wegen $\sphericalangle EFD = \sphericalangle PAD$ auch $EQDF$ ein Sehnenviereck und es folgt $\sphericalangle EFQ = \sphericalangle EDQ = \sphericalangle PAE$.
Somit sind die Dreiecke APE und FEQ ähnlich. Für $\overline{PE} \neq \overline{EQ}$ lassen sie sich durch eine zentrische Streckung vom Schnittpunkt X der Geraden AD und PQ aus aufeinander abbilden. Für $\overline{PE} = \overline{EQ}$ werden sie durch eine Verschiebung aufeinander abgebildet. (Falls F nicht zwischen A und D liegt, verläuft der Beweis völlig analog.) Für den Schnittpunkt G der

Parallelen zu BP durch E mit BC folgt entsprechend, dass $EGCQ$ ein Sehnenviereck ist, woraus sich die Ähnlichkeit der Dreiecke BEP und GQE ergibt. Diese werden durch dieselbe Streckung bzw. Verschiebung wie vorher aufeinander abgebildet, weil sie die Seiten PE bzw. EQ gemeinsam haben. Somit schneiden sich BC und PQ ebenfalls im Punkt X bzw. sind parallel.

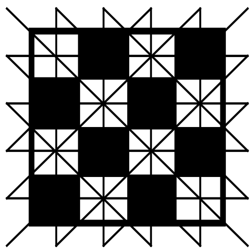


Für $\overline{PE} \neq \overline{EQ}$ folgt aus der Voraussetzung $\overline{XD} \cdot \overline{XA} = \overline{XQ} \cdot \overline{XP} = \overline{XC} \cdot \overline{XB}$, woraus sich ergibt, dass $ABCD$ ein Sehnenviereck ist. Für $\overline{PE} = \overline{EQ}$ sind $BCQP$ und $PQDA$ zwei Trapeze mit einer gemeinsamen Parallelen; daher ist auch $ABCD$ ein Trapez und somit ein Sehnenviereck.

Hinweise: Mit der Methode der **Inversion** am Einheitskreis um E ergibt sich ein besonders eleganter Beweis.

Aufgabe 3

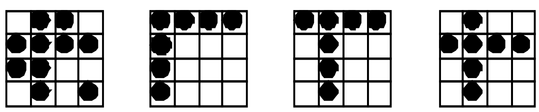
Die 16 Felder eines 4x4-Schachbretts lassen sich wie folgt in 18 Linien ordnen: die vier Zeilen, die vier Spalten, fünf Diagonalen von Nordwest nach Südost und fünf Diagonalen von Nordost nach Südwest. Dabei bestehen diese Diagonalen aus 2, 3 oder 4 über Eck benachbarten Feldern jeweils gleicher Farbe; die Eckfelder des Schachbretts alleine bilden also keine Diagonale.



Nun wird in 10 der 16 Felder je ein Spielstein gesetzt. Jede der 18 Linien, die dann eine gerade Anzahl von Steinen enthält, zählt einen Punkt.

Welches ist die größtmögliche durch Setzen der 10 Spielsteine erreichbare Punktzahl? Die Antwort ist zu begründen.

Lösung: Die größtmögliche erreichbare Punktzahl ist 17, wie das abgebildete Beispiel zeigt. Es bleibt zu zeigen, dass die Maximalpunktzahl 18 nicht erreicht werden kann. Dazu nehmen wir die Existenz einer Belegung mit 18 Punkten an und betrachten zunächst die Zeilen bzw. Spalten. Weder in einer Zeile noch in einer Spalte kann dann eine ungerade Anzahl von Steinen liegen, so dass wegen der Summe 10 nur (bis auf Permutationen) die Möglichkeiten $(4;2;2;2)$ oder $(4;4;2;0)$ vorkommen können. Gibt es jedoch eine Zeile (Spalte) mit 0 Steinen, so können alle Spalten (Zeilen) wegen der erforderlichen Geradzahligkeit höchstens 2 Steine enthalten, womit die Summe 10 nicht erreicht wird. Daher gibt es genau eine Zeile und eine Spalte mit 4 Steinen. Der Schnittpunkt dieser beiden Linien kann nun a) in einer Ecke, b) auf dem Rand, aber nicht in einer Ecke, c) im Inneren des Quadrats liegen. Wegen der Symmetrie genügt die Betrachtung je eines Beispiels.



17 Punkte Fall a) Fall b) Fall c)

Fall a): Hier enthalten die fünf NW-SO-Linien erst je einen Stein. Weil aber nur noch drei Steine zu setzen sind, ist die Punktzahl 18 nicht mehr erreichbar.

Fall b): Hier enthalten vier der NW-SO-Linien erst je einen Stein. Weil aber nur noch drei Steine zu setzen sind, ist die Punktzahl 18 nicht mehr erreichbar.

Fall c): Die beiden NW-SO-Linien mit genau 2 Feldern enthalten erst einen Stein. Wenn sie mit einem zweiten Stein besetzt werden, zählt die obere SW-NO-Linie mit 3 Steinen keinen Punkt. Auch hier wird die Punktzahl 18 nicht erreicht.

Hinweis: Es gibt Belegungen mit 8 Steinen und 18 Punkten. Allerdings ist es unzulässig zu argumentieren, eine solche Anordnung der 8 Steine müsse in der optimalen Anordnung von 10 Steinen enthalten sein.